

УДК 621.85.05-034

Н. В. Михайлов, магистрант, **А. М. Лахин**, канд. техн. наук, доцент
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, ДНР, Россия
Тел./Факс: +7 949 382 23 85; E-mail: tirex_nic@mail.ru

ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗКИ ПО ПЯТНУ КОНТАКТА ЗУБЬЕВ МУФТЫ ПРИ БЛИЗКИХ РАДИУСАХ КРИВИЗНЫ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ПРОФИЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ ПЕРЕКОСОВ ОСЕЙ ВАЛОВ

В работе рассмотрены особенности распределения нагрузки по пятну контакта зубьев муфты в условиях отсутствия перекосов осей валов. Представлена методика расчета распределения нагрузки по пятну контакта зубьев муфты при близких радиусах кривизны эвольвентных профилей с учетом угла контактирования и изгибной деформации.

Ключевые слова: зубчатая муфта, распределение нагрузки, пятно контакта, эвольвентный профиль, радиус кривизны, угол контактирования, внутреннее зацепление.

N. V. Mikhailov, A. M. Lakhin

FEATURES OF LOAD DISTRIBUTION OVER THE CONTACT PATCH OF COUPLING TEETH AT CLOSE RADIUS OF CURVATURE OF INVOLUTE PROFILES UNDER CONDITIONS OF ABSENCE OF AXIS MISALIGNMENT

The paper considers the features of load distribution over the contact patch of the coupling teeth in the conditions of absence of shaft axes misalignment. The technique of calculation of load distribution over the contact patch of the coupling teeth at close radii of curvature of involute profiles is presented, taking into account the contact angle and bending deformation.

Keywords: gear coupling, load distribution, contact patch, involute profile, radius of curvature, contact angle, internal gearing.

1. Введение

Зубчатые муфты являются одними из наиболее распространенных элементов трансмиссий технологического оборудования, что обусловлено их высокой нагрузочной способностью, компактностью и способностью компенсировать несоосность соединяемых валов. Однако практика эксплуатации показывает, что именно зубчатые муфты часто выступают «слабым звеном» в кинематических цепях машин. Статистика отказов свидетельствует, что до 80% выходов из строя зубчатых муфт связано с контактными разрушениями и интенсивным износом рабочих поверхностей зубьев, вызванными неравномерным распределением нагрузки по пятну контакта.

Актуальность настоящего исследования обусловлена тем, что существующие инженерные методы расчета зубчатых муфт базируются преимущественно на классической теории Герца, которая предполагает, что размеры площадки контакта малы по сравнению с размерами взаимодействующих тел. С увеличением напряженности работы зубчатых муфт несостоятельность привычных методов их расчета сказывается все более резко. Это связано прежде всего с тем, что при определении концентрации нагрузки на пятне контакта зуба не учитывается, что контактирующие поверхности зубьев имеют близкие радиусы кривизны эвольвентных профилей из-за наличия между ними небольших углов контактирования β до 0,01 рад.

Целью данной работы является разработка методики расчета концентрации нагрузки на пятне контакта внутреннего зацепления зубьев, что позволяет учесть особенности их взаимодействия и произвести расчет неравномерности распределения нагрузки на пятне их контакта в условиях внутреннего зацепления зубьев при близких радиусах

кривизны эвольвентных профилей с учетом влияния эксплуатационных и технологических факторов.

В соответствии с поставленной целью в работе определены следующие задачи:

1. Исследовать влияние угла контактирования β на распределение нагрузки по пятну контакта зубьев с прямолинейными образующими, взаимодействующих без перекоса

2. Разработать методику расчета концентрации нагрузки, основанную на замене эвольвентных профилей цилиндрами с близкими радиусами кривизны.

3. Представить эпюр распределения нагрузки по пятну контакта зуба втулки с прямолинейной образующей, взаимодействующего с зубом обоймы без перекоса.

Эти задачи решаются в данной работе.

2. Основное содержание и результаты работы

В связи с тем, что радиусы кривизны эвольвентных профилей близки, по высоте зубьев, взаимодействующих без перекоса, принято допущение, что нагрузка распределена в соответствии с контактной задачей И. Я. Штаермана о сжатии упругих тел, радиусы которых почти равны [1]. Кроме того, согласно методу отображения, приняты дополнительные допущения о распределении нагрузки на пятне контакта зуба муфты [2].

Предположим, что между эвольвентными профилями пары зубьев муфты с прямолинейными образующими, взаимодействующих без перекоса, имеется угол контактирования β (рисунок 1, а), возникающий из-за погрешностей их изготовления и радиальных смещений осей втулки относительно обоймы. При приложении к муфте нагрузки он уменьшается до угла β_d вследствие изгибной деформации зубьев. Ввиду того, что взаимодействие пары зубьев реализуется по вершине зуба обоймы, уменьшение угла контактирования будет определяться его изгибной деформацией, так как при действии нагрузки по вершине зуба он менее жесткий, чем зуб втулки при действии нагрузки у ножки.

Задачу определения неравномерности распределения нагрузки по пятну внутреннего контакта зубьев при близких радиусах кривизны эвольвентных профилей решаем путем замены ее задачей о сжатии цилиндров внутреннего контакта, радиусы которых почти равны. Задавая радиусы r_{11} и r_{21} (рисунок 1, а) цилиндрических поверхностей через радиусы кривизны производящих контуров зубьев втулки и обоймы в точке А, можно воссоздать условия контактирования рабочих поверхностей зубьев муфты. При этом радиусы кривизны цилиндрических поверхностей определяем из условия того, что изгибная деформация уже произошла и установлен угол контактирования β_n (рисунок 1, а) между эвольвентными профилями.

Учитывая, что радиус-вектор $r_y = OA = OQ_1 + Q_1A$ (рисунок 1, а), уравнение эвольвенты можно представить в таком виде:

$$r_y = r_b[(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)i + (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)j]. \quad (1)$$

Так как окружность радиуса r_b является эвольвентой профиля AA'' , то $AO_1 = r_b \varphi$ — радиус кривизны эвольвентного профиля.

На основании особенностей построения эвольвенты можно записать следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi - \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha; \\ \varphi &= \operatorname{tg} \alpha; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\alpha = \arccos \frac{r_B}{r_y}; \tag{3}$$

где θ — эвольвентный угол, значения приведены в справочниках;

φ — угол развернутости;

α — угол профиля в точке на концентрической окружности заданного радиуса r_y .

Радиус основной окружности определяется по формуле:

$$r_B = \frac{mz}{2} \cos \alpha_\omega, \tag{4}$$

где m — модуль зубьев;

z — число зубьев.

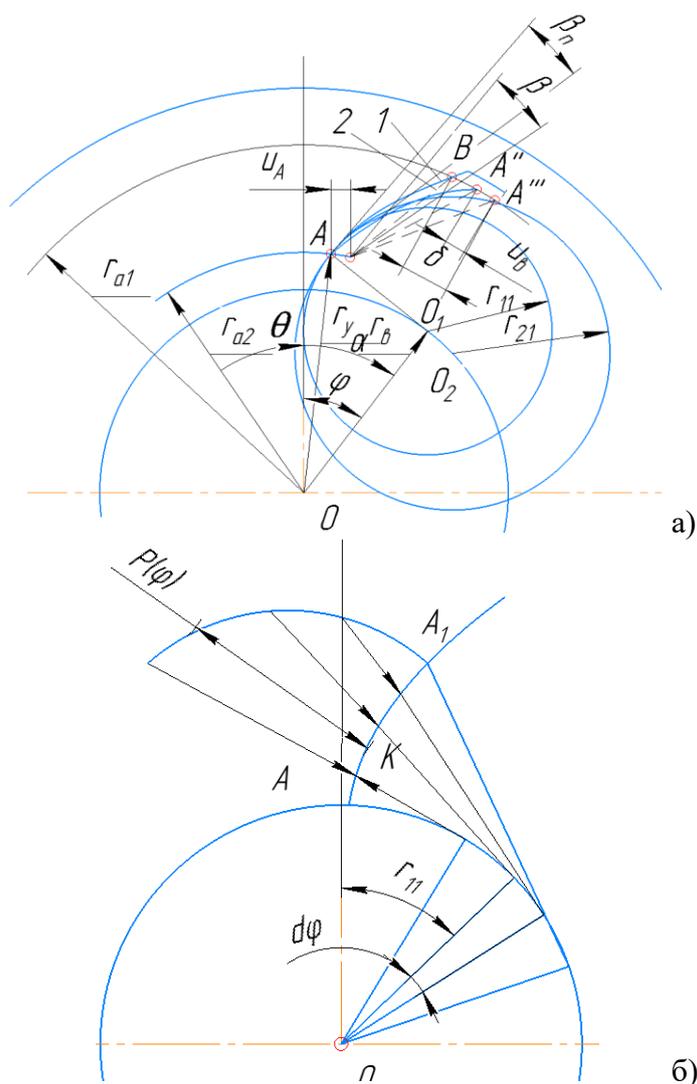


Рисунок 1. Особенности взаимодействия зубьев втулки и обоймы:
 а – схема контактирования зубьев, б – распределение нагрузки по высоте эвольвентного профиля

Учитывая (2) и (3), радиус кривизны эвольвентного профиля в точке А (рисунок 1, а) определяем по формуле:

$$r_{11} = r_B \varphi_A = r_B \operatorname{tg} \arccos \frac{r_B}{r_{a2}}, \quad (5)$$

где φ_A — угол развернутости эвольвентного профиля в точке А;

r_{a2} — радиус вершин зубьев обоймы.

Принимая во внимание рисунок 1, а и формулу (3), находим зависимости:

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{н}} = \frac{\delta - u_B}{L} \cos \alpha_{ra1},$$

где

$$u_B = u \frac{r_{a1}}{r_B}$$

тогда

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{н}} = \operatorname{tg} \beta - \frac{u}{L}. \quad (6)$$

Здесь, δ — зазор между противоположными от зоны контактирования эвольвентными профилями на дуге радиуса вершин зубьев втулки и обоймы до их изгиба;

u_B — изменение точки A''' по дуге радиуса вершин зубьев втулки r_{a1} при нагружении муфты;

u — изгибная деформация зубьев в точке А, нормальная по профилю;

L — длина эвольвентного профиля на участке AA'' .

Длина дуги L эвольвентного профиля на основании (1) при $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $t \in (\varphi_{ra2}, \varphi_{ra1})$ определяется уравнением:

$$L = \int_{\varphi_{ra2}}^{\varphi_{ra1}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int r_B \varphi d\varphi = r_B \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi_{ra2}}^{\varphi_{ra1}}$$

Учитывая (2), (3) и рисунок 4, а, находим длину дуги эвольвентного профиля AA'' :

$$L = \frac{r_B}{2} \left(\operatorname{tg}^2 \arccos \frac{r_B}{r_{a1}} - \operatorname{tg}^2 \arccos \frac{r_B}{r_{a2}} \right) \quad (7)$$

Анализируя зону контактирования, охватывающего и охватываемого цилиндров (рисунок 1, а), между которыми имеется угол контактирования $\beta_{\text{ц}}$, находим следующую зависимость:

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{ц}} = \frac{2(r_{21} - r_{11})}{\pi r_{11}},$$

где r_{11} — радиус кривизны охватываемой поверхности;

r_{21} — радиус кривизны охватывающей поверхности.

Отсюда

$$r_{21} = \left(1 + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \beta_{\text{ц}} \right) r_{11}. \quad (8)$$

Предполагая, что в месте контакта радиусы кривизны эвольвентных профилей и цилиндров равны и $\operatorname{tg} \beta_{\text{ц}} = (\operatorname{tg} \beta_u)^\varepsilon$, где ε — коэффициент перехода и принимая во внимание (6), находим значение r_{21} для контактирующих зубьев муфты:

$$r_{21} = 1 + \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{u}{L} \right)^\varepsilon r_{11} \quad (9)$$

Введем обозначение

$$K_1 = 1 + \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{u}{L} \right)^\varepsilon \quad (10)$$

Тогда

$$r_{21} = K_1 r_{11}. \quad (11)$$

Значение коэффициента перехода ε зависит от конструктивных особенностей зубьев, для эвольвентного профиля $\varepsilon = 0,92$ (получено экспериментальным путем) [3].

После нагружения муфты на поверхности контакта зубьев будет действовать только нормальное давление (из предположения, что сжимаемые рабочие поверхности абсолютно гладкие), которое обозначается $P(\varphi)$ (рисунок 1, б). Тогда на эвольвентный элемент KL поверхности зуба будет действовать сила:

$$dp(\varphi) = p(\varphi) r_{\text{в}} \varphi d\varphi \quad (12)$$

Произведя замену эвольвентных профилей пары зубьев (рисунок 1, а), взаимодействующих в условиях внутреннего контакта при близких радиусах кривизны — цилиндрами, радиусы которых почти равны, в уравнении (12) можно считать $r_{11} = r_{\text{в}} \varphi$. На основании первого допущения произведем замену параметров в уравнении (12), где $p(\varphi) = p(\gamma)$ и $d\varphi = d\gamma$ (рисунок 2).

Тогда целиком перейдем к решению контактной задачи И. Я. Штаермана [1], где на элемент KL охватываемой поверхности действует сила:

$$dp(\gamma') = p(\gamma') r_{11} d\gamma'. \quad (13)$$

Соотношение, которое имеет место в области контакта:

$$U_{1r} + U_{2r} = u \cos \gamma' - (r_{21} - r_{11})(1 - \cos \gamma), \quad (14)$$

где U_{1r} и U_{2r} — полные радиальные перемещения точки первого и второго тела в пределах от $-\gamma_0$ до γ_0 по γ' ;

u — сближение в точке начального контакта;

γ — угол до рассматриваемой точки в области контакта.

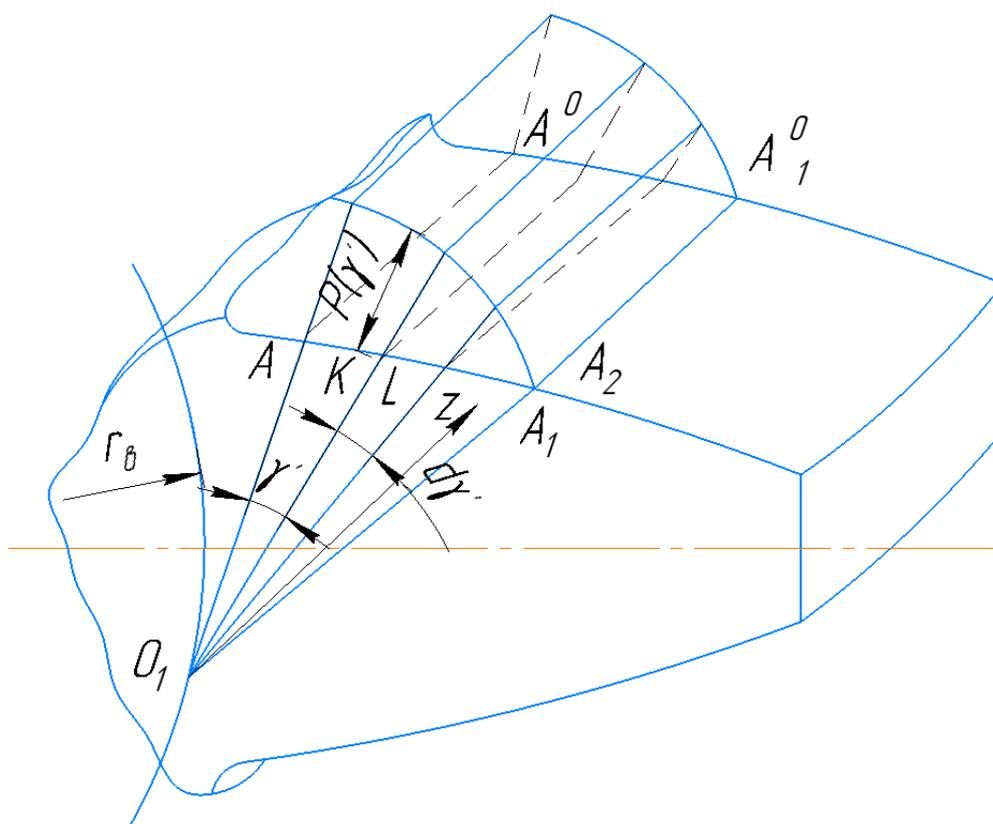


Рисунок 2. Эпюра распределения нагрузки по пятну контакта зуба втулки с прямолинейной образующей, взаимодействующего с зубом обоймы без перекоса

Продельвая соответствующие преобразования и учитывая, что функция $p(x)$ должна быть вследствие симметрии четной для области контакта $0 < x < x_0$, а также предполагая согласно методу отображения [1], что если полупространство, на которое действует сила, разрезать плоскостью, проходящей через эту силу, то напряжения, которые испытывает отброшенная часть пространства, должны возникать в оставшейся части (рисунок 2). Тогда для зубьев муфт с прямолинейными образующими, контактирующих без перекоса, учитывая (6), в цилиндрических координатах будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\nu_1(1 + K_1) \int_0^{\gamma_0} p(\gamma') [\cos(\gamma - \gamma') \ln \operatorname{tg} \frac{|\gamma - \gamma'|}{2} + \cos(\gamma + \gamma') \ln \operatorname{tg} \frac{|\gamma + \gamma'|}{2} - \\ 2 \cos \gamma \cos \gamma' \ln \operatorname{tg} \frac{\gamma'}{2}] d\gamma' - x_1(1 + K_1) \int_0^{\gamma_0} p(\gamma') [\sin |\gamma - \gamma'| + \sin |\gamma + \gamma'| - \\ 2 \cos \gamma \sin \gamma'] d\gamma' + 4\nu_1(-\cos \gamma) \int_0^{\gamma_0} p(\gamma') d\gamma' = (K_1 - 1)(1 - \cos x); 0 < \gamma < \gamma_0; \\ Br_B \arccos \frac{r_B}{r_{a2}} \int_0^{\gamma_0} p(\gamma) \cos \gamma d\gamma = P_i, \end{array} \right. \quad (15)$$

где B — ширина зубьев втулки; P_i — нагрузка, действующая на зуб.

Особенность полученной системы интегральных уравнений состоит в том, что она определяет характер распределения нагрузки по пятну контакта, прямо не зависящий

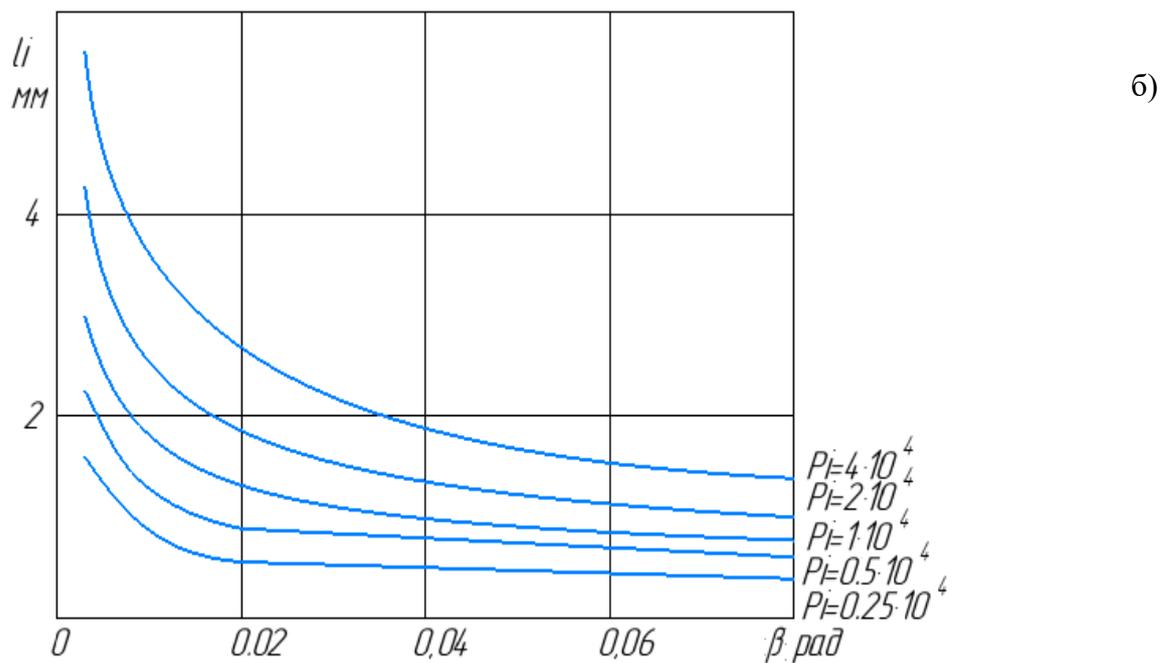
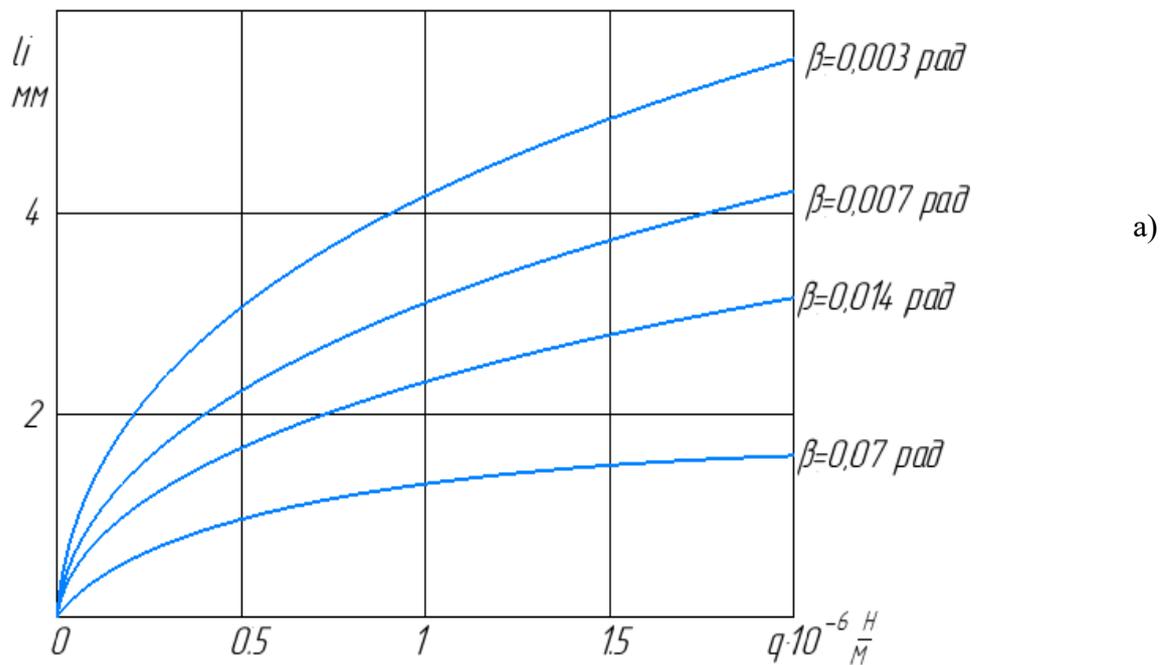


Рисунок 3. Изменение длины пятна контакта:
 а – в зависимости от удельной нагрузки
 б – в зависимости от угла контактирования

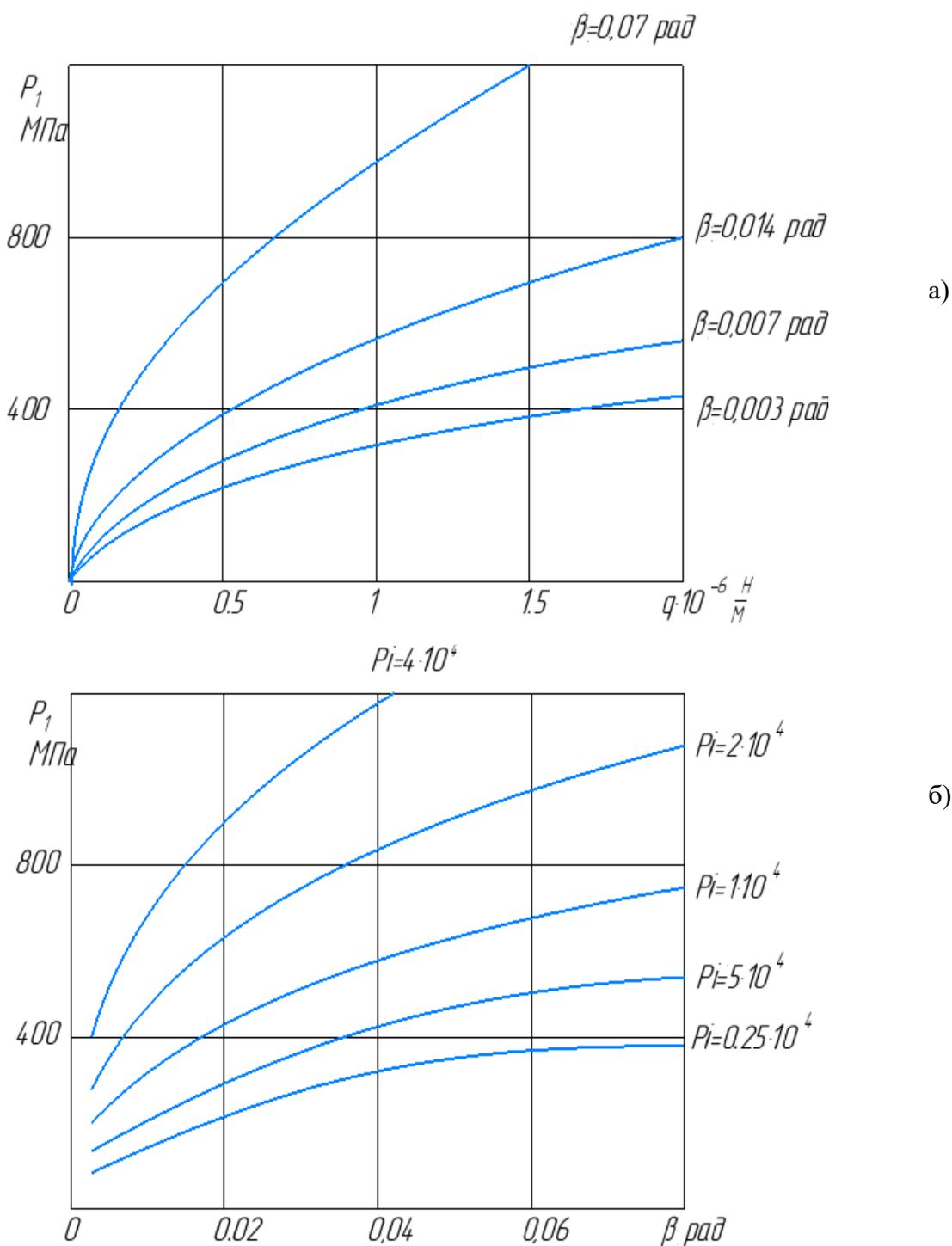


Рисунок 4. Изменение максимального контактного давления:
 а – в зависимости от удельной нагрузки
 б – в зависимости от угла контактирования

от радиусов кривизны поверхностей, а функционально выраженный в зависимости от угла контактирования β .

Решение этой задачи сводится к решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля [4], метод решения которого предложен Векуа [1]. Оно сводится к замене одной из функций приближенным выражением, однако решение такого уравнения получается в замкнутом виде и полученные определенные интегралы не выражаются в явном виде. Поэтому решение системы уравнений производим методом конечных разностей.

На рисунке 3, а изображен график изменения длины пятна контакта по высоте зуба, в зависимости от удельной нагрузки P/B , приложенной к зубу при различных углах контактирования. Параметры пятна контакта определялись для зубчатых муфт со следующими характеристиками: $m = 5,5$ мм, $Z = 22$, $\alpha_\omega = 20^\circ$, $B = 20$ мм, материал сталь 20Х2Н4А. На рисунке 3, б представлен график изменения длины пятна контакта по высоте зуба в зависимости от угла контактирования β при фиксированных нагрузках. Изменение длины пятна контакта при углах β , меньших $0,014$ рад, имеет более выраженный характер, чем при больших его значениях.

Из графиков рисунка 4 следует, что технологические погрешности и эксплуатационные факторы, характеризующие угол контактирования β , оказывают существенное влияние на величину максимального нормального контактного давления P_1 .

Приведенные зависимости относятся к случаю контактирования зубьев без их перекоса с прямолинейной образующей, когда нагрузка, воспринимаемая зубьями, распределена по нормали к контактирующей поверхности. В этом случае на контактной площадке касательная нагрузка отсутствует в силу того, что нет относительных перемещений зубьев.

3. Заключение

В результате проведенного исследования были выявлены и проанализированы особенности распределения нагрузки по пятну контакта зубьев муфт, работающих в условиях близких радиусов кривизны эвольвентных профилей при отсутствии перекосов осей. Установлено, что традиционные методы расчета, базирующиеся на теории Герца, не учитывают специфику внутреннего зацепления зубчатых муфт, где радиусы кривизны взаимодействующих поверхностей почти равны, что приводит к существенным погрешностям при определении напряжений.

Разработана методика расчета концентрации нагрузки, основанная на замене эвольвентных профилей цилиндрами с близкими радиусами кривизны с использованием контактной задачи И. Я. Штаермана. Получены аналитические зависимости для определения угла контактирования с учетом изгибной деформации зубьев и технологических погрешностей изготовления. На основе решения интегро-дифференциальных уравнений методом конечных построены графические зависимости, показывающие влияние угла контактирования и удельной нагрузки на длину пятна контакта. Установлено, что наибольшее влияние на длину пятна контакта оказывают углы контактирования менее $0,014$ рад. Предложенная методика позволяет более точно определять концентрацию нагрузки и может быть рекомендована для инженерных расчетов зубчатых муфт на стадии проектирования. В работе выполнены исследования особенностей распределения контактной нагрузки зубьев, которая представлена в виде эпюра распределения нагрузки по пятну контакта зуба втулки с прямолинейной образующей, взаимодействующего с зубом обоймы без перекоса.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Штаерман, И. Я. Контактная задача теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1949. - 270 с.
2. Wellauer, N. J., Seireg A. Bending Strength of Gear Teeth by Cantilever-Plate Theory, Paper ASME, 1959, No. A-50.
3. Михайлов, А. Н., Финченко В. А. Рациональный способ применения зубчатых муфт. Киев, 1984. – 10 с. Рукопись депонирована в УкрНИИТИ, № 1525.
4. Векуа, И. Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Планкена. — Прикладная механика, 1945, т. 9, № 2, с. 49–54.
5. Рябченко, С. В. Шлифование зубчатых колес тарельчатыми кругами // Журнал «Оборудование и инструмент для профессионалов» Серия «Металлообработка». – 2/2014. – С. 14-15.
6. Александров, И. В. Исследование влияния различных факторов на контактную выносливость зубчатых колес в тяжелом машиностроении / И. В. Александров, А. И. Волошин, В. Ф. Колесник, В. Н. Стрельников // Вестник НТУ «ХПИ». — Харьков, 2006. — Вып. 22. — С. 5 — 9.

Поступила в редколлегию 21.05.2025 г.