

УДК 621,9

В.А. Нестеров, А.С. Суханов

АО «Красмаш», г. Красноярск, Россия

Тел.: +8 (391) 264-62-92. Факс: +8 (391) 264-48-91;

E-mail: misternester@gmail.com

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПО БАЛОЧНОЙ И ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛЯМ

В данной статье рассматриваются деформации композитных стержней круглого сечения. Вычисления выполняются в среде программного пакета FE космос/М с помощью стандартного пучка и элемента оболочки. Участвуют две вычислительные модели, которые являются теорией луча и оболочки. Показано, что в некоторых случаях теория луч дает результаты, неприемлемые. Определены пределы и условия для применения упрощенной луч теории.

Ключевые слова: Потери устойчивости, составной балки и снарядов, метод конечных элементов.

V. Nesterov, A. Sukhanov

CALCULATION ON STABILITY OF COMPOSITE RODS ON BEAM AND SHELL MODELS

Buckling of composite circular cross section rod is considered. The calculations are performed in the environment of the FE software package COSMOS/M using the standard beam and shell elements. Two computational models are involved. They are beam and shell theories. It is shown that in some cases the beam theory gives unacceptable results. The limits and conditions for the applicability of the simplified beam theory are defined.

Keywords: Buckling, composite beams and shells, finite element method.

Композиционные материалы снискали заслуженную популярность в производстве разнообразных элементов авиационной, ракетной и космической техники. Обладая уникальными удельными механическими свойствами, они позволяют изготавливать конструкции с высокой степенью весового совершенства. В некоторых случаях особую привлекательность композитам придают какие-то конкретные эксплуатационные свойства. Композиты отличаются рядом особенностей, которые не учитываются в классических теориях балок, пластин и оболочек. Стремление учесть эти особенности приводит к появлению усложненных расчетных моделей, в которых отражены и анизотропия композитов, и их низкая жесткость по отношению к трансверсальным деформациям, и неоднородность, слоистость, переменная жесткость и проч. Иногда особенность поведения композитов заставляет вносить изменения в мерность постановок. Так, например, при анализе композитных стержневых (ферменных и рамных) конструкций, которые в классическом варианте всегда описываются с помощью балочных моделей, приходится прибегать к более сложной оболочечной постановке, что, безусловно, снижает эффективность решения и повышает на порядки вычислительные затраты.

В настоящем исследовании на примере анализа несущей способности композитных стержней показано, что в ряде практически значимых случаев балочная теория дает недопустимо неточные значения критического усилия и формы потери устойчивости.

Рассмотрим композитный стержень в виде трубки, изготовленной намоткой углепластикового волокна парными слоями под углами $\pm\varphi$ к образующей. В этом случае стенку трубки, толщину которой зададим равной 1 мм, можно считать ортотропной с эффективными упругими параметрами, вычисляемыми по формулам[1]:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \overline{E}_1 \cos^4 \varphi + \overline{E}_2 \sin^4 \varphi + 2 \left(\overline{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\
A_{22} &= \overline{E}_1 \sin^4 \varphi + \overline{E}_2 \cos^4 \varphi + 2 \left(\overline{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\
A_{12} = A_{21} &= \overline{E}_1 \mu_{12} + \left(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 - 2 \left(\overline{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12} \right) \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\
A_{33} &= \left(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 - 2 \overline{E}_1 \mu_{12} \right) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos^2 2\varphi,
\end{aligned}$$

где $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$ - приведенные модули упругости:

$$\overline{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})}.$$

Приняты следующие механические свойства однонаправленного углепластика: продольный модуль упругости $E_1=180$ ГПа, поперечный модуль упругости $E_2=6,2$ ГПа, модуль сдвига $G_{12}=5$ ГПа, коэффициенты Пуассона: $\mu_{12}=0,007$, $\mu_{21}=0,21$ [2]. Стержень длиной 1 м закреплен по торцам шарнирно. К шарнирно-подвижному торцу приложим сжимающую силу в 1 Н.

В балочной модели материал стержня будем считать условно изотропным с эффективным модулем упругости A_{11} . Параллельно будем выполнять расчеты по оболочечной модели, в которой анизотропия учитывается строго с заданием всех упругих характеристик ортотропной среды.

Рассчитаем величины критической нагрузки и формы потери устойчивости для стержня диаметром 30 мм с различными значениями угла намотки композитного волокна. Результаты расчетов по двум моделям представлены в таблице 1. Они свидетельствуют о том, что почти на всем интервале изменения угла φ критические нагрузки, вычисленные по балочной и оболочечной моделям совпадают.

Таблица 1

Критическая сжимающая сила для шарнирно-опертого стержня с $l=1$ м, $d=30$ мм

$\varphi, ^\circ$	$P_{кр}, \text{Н}$		$\Delta, \%$
	BEAM	SHELL	
5	16741,4	15891,4	-5,35
10	16036,3	15551,3	-3,12
15	14918,7	14658,6	-1,77
25	11787,8	11704	-0,72
35	8178,15	8155,49	-0,28
45	4922,32	4926,29	0,08
55	2569,88	2582,21	0,48
65	1247,7	1258,44	0,85
75	718,031	723,468	0,75
85	593,073	593,965	0,15

Незначительные расхождения (до 5,35%) имеются при самых малых углах намотки $\varphi = \pm 5^\circ$. Различие обусловлено влиянием ортотропии, которая в балочной модели не учитывается. При этом формы потери устойчивости – балочные с одной полуволной (рис. 1).



Рис. 1. Формы потери устойчивости при: *a* – балочной модели, *б* – оболочечной модели

Если мы увеличим диаметр стержня до 60 мм, то интервал совпадения критических усилий, определенных по двум моделям, сократится. Точное совпадение усилий и форм соответствует большим углам намотки. По мере увеличения угла φ расхождение уменьшается (рис. 2).

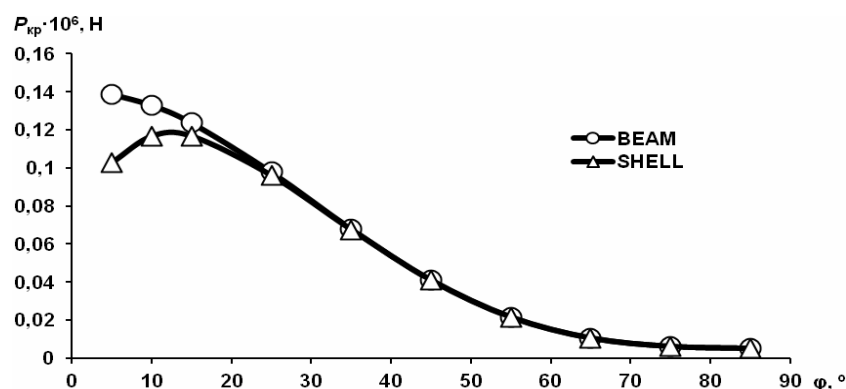


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для шарнирно-опертого стержня с $l=1$ м, $d=60$ мм

При $\varphi < 15^\circ$ разница становится большой, и действительная форма потери устойчивости становится оболочечной. На рис. 3 представлены формы потери устойчивости с углом намотки $\varphi = 10^\circ$. Соответствующие им усилия почти совпадают. Формы потери устойчивости моделей с $\varphi < 10^\circ$ – оболочечные, а для моделей $\varphi \geq 15^\circ$ – балочные.

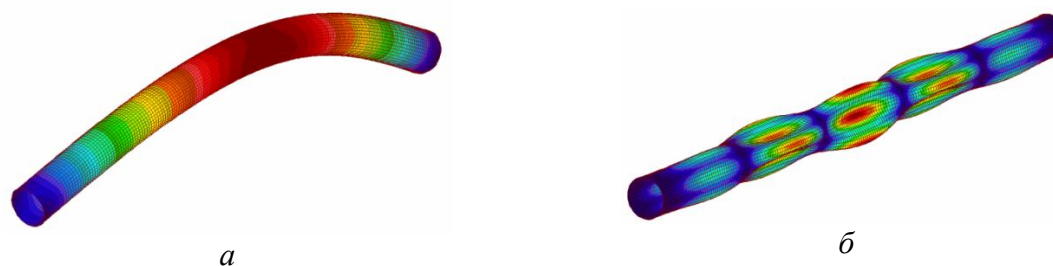


Рис. 3. Формы потери устойчивости при $d=60$ мм, с углом намотки $\varphi=10^\circ$: *a* – балочная форма, *б* – оболочечная форма.

Численный эксперимент со стержнем ещё большего диаметра ($d=100$ мм) показал, что сопоставимые результаты расчета устойчивости по двум моделям имеют место при углах намотки $\varphi \geq 45^\circ$ (рис. 4). При малых значениях этого угла эти данные (усилия и форма) кардинально разнятся. При малых значениях углов намотки различие в критических усилиях многократные, формы потери устойчивости при этом – оболочечные (рис. 5, б), которые в балочной модели игнорируются, а при больших значениях угла φ – балочные (рис. 5, а). Следовательно, для стержней относительно больших диаметров с малыми углами армирования балочной теорией пользоваться нельзя.

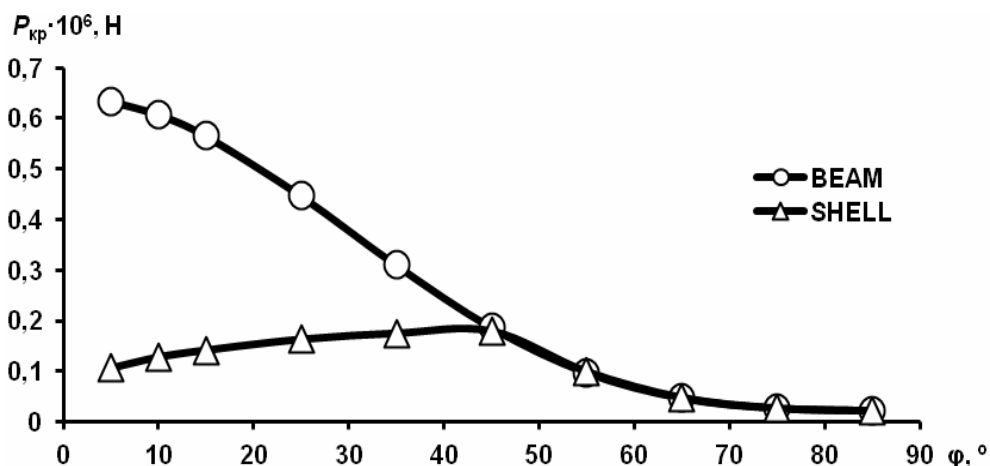


Рис. 4. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для шарнирно-опертого стержня с $l=1$ м, $d=100$ мм

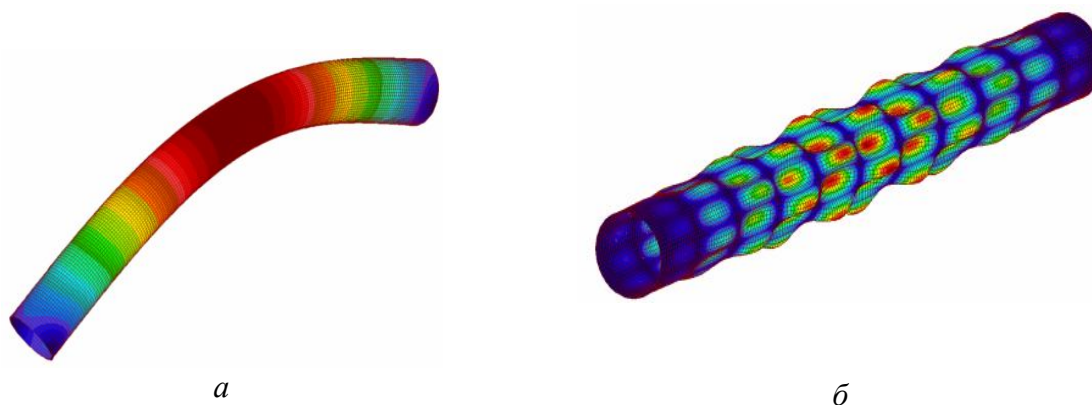


Рис. 5. Характерные формы потери устойчивости при $d=100$ мм. а – балочная форма, б – оболочечная форма.

Ситуация несовпадения результатов анализа несущей способности композитного стержня по двум моделям (балочной и оболочечной) усугубляется при иных вариантах закрепления торцов. Так, если один край стержня ($l=1$ м, $d=30$ мм) шарнирно-подвижно оперт (на нем приложено осевое усилие), а второй – защемлен, то исследуемая разница критических усилий возрастает (рис. 6).

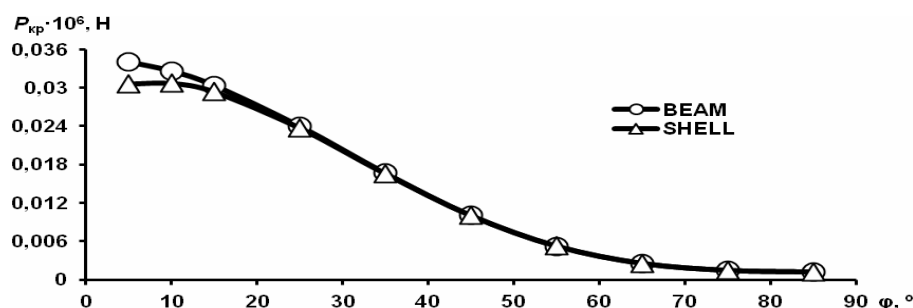


Рис. 6. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого один из торцов шарнирно-оперт, а второй зашечлен с $l=1$ м, $d=30$ мм

Формы потери устойчивости показаны на рис. 7. Хорошее совпадение наступает при $\varphi \geq 15^\circ$. При малых значениях ($\varphi=5^\circ$, $\varphi=10^\circ$) разница больше, чем та, что имела место для шарнирно-опертого по обоим концам стержня. И, хотя формы потери устойчивости совпадают (обе – балочные), но критические усилия расходятся заметно (для модели $\varphi=5^\circ$, $\Delta=10\%$), что обусловлено неучетом ортотропии в балочной модели. Для стержня с этими же граничными условиями, но большего диаметра $d=60$ мм графики зависимости критического усилия от угла намотки (рис. 8) для двух моделей на интервале $\varphi < 35^\circ$ также расходятся (и по формам потери устойчивости тоже). Модель с $\varphi=30^\circ$ (рис. 7) – переходная. Здесь близко соседствуют обе формы (оболочечная и балочная).

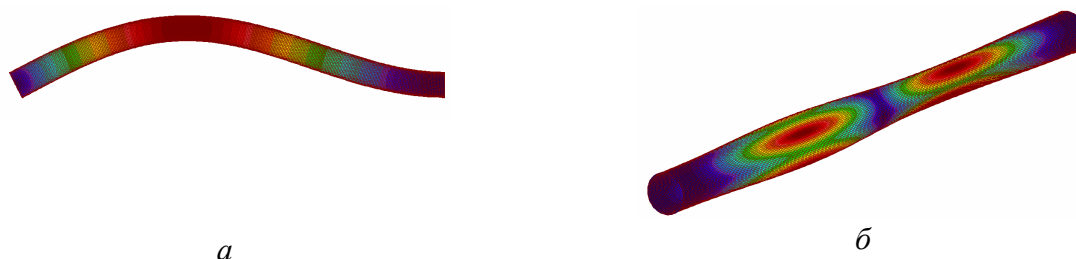


Рис. 7. Характерные формы потери устойчивости оболочечной модели стержня, у которого один из торцов шарнирно-оперт, а второй зашечлен при $d=30$ мм, с углом намотки $\varphi=30^\circ$.

a – балочная форма, b – оболочечная форма (критическая).

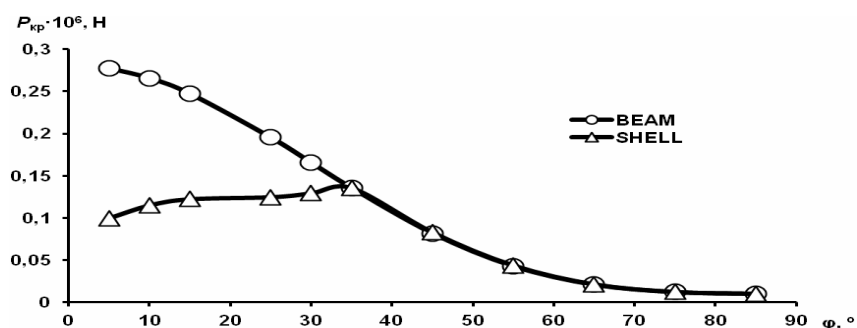


Рис. 8. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого один из торцов шарнирно-оперт, а второй зашечлен с $l=1$ м, $d=60$ мм

Если зашлемлены оба края стержня, то исследуемое различие возрастает в еще большей степени. Причем, для стержня с $d=30$ мм удовлетворительные результаты (рис. 9), полученные по балочной модели, начинаются с $\varphi=25^\circ$ и выше, а для модели $d=60$ мм (рис. 10) с $\varphi \geq 55^\circ$. На рис. 11 представлена переходная модель с $\varphi=45^\circ$, в ней соседствуют оба вида форм потери устойчивости. Таким образом, применимость упрощенной балочной теории для расчета композитных стержней зависит и от вида граничных условий на торцах.

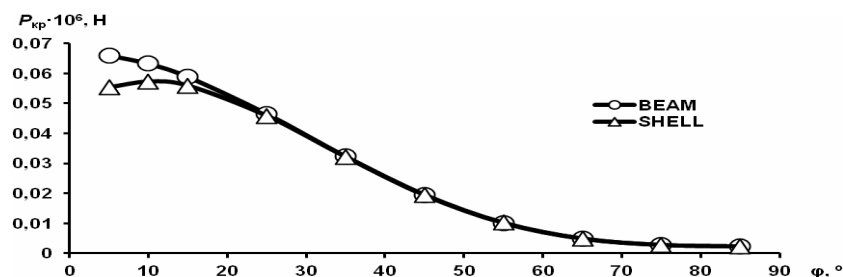


Рис. 9. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого оба края зашлемлены с $l=1$ м, $d=30$ мм

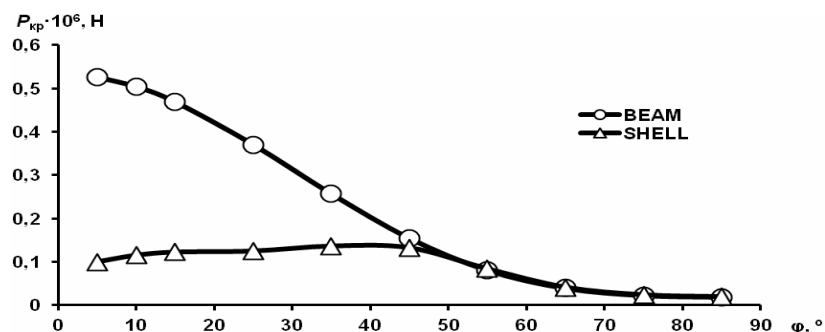


Рис. 10. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого оба края зашлемлены с $l=1$ м, $d=60$ мм

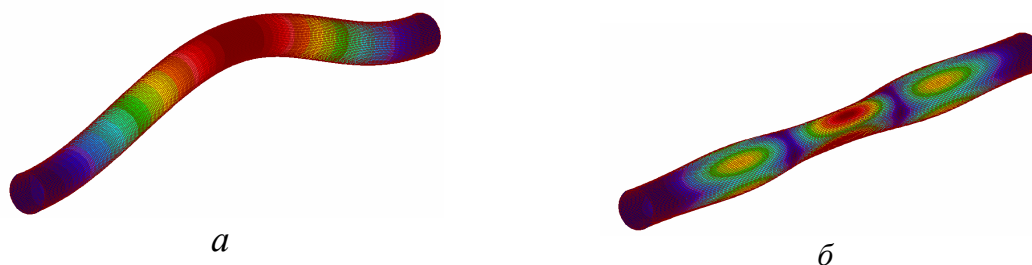


Рис. 11. Формы потери устойчивости зашлемленного по обоим концам стержня при $d=30$ мм с углом намотки $\varphi=45^\circ$. *a* – балочная форма, *б* – оболочечная форма (критическая)

Если увеличить длину стержня, то зона применимости балочной модели увеличивается для любых сочетаний граничных условий. Так, например, если для стержня диаметром $d=60$ мм и длиной $l=1$ м, шарнирно-опертым одним концом и заземленного другим, интервал приемлемых результатов по углу намотки начинается с $\varphi=35^\circ$ и выше, то при длине $l=1,5$ м эта граница снижается до $\varphi=25^\circ$ (рис. 12), а при длине $l=2$ м до $\varphi=20^\circ$ (рис. 13).

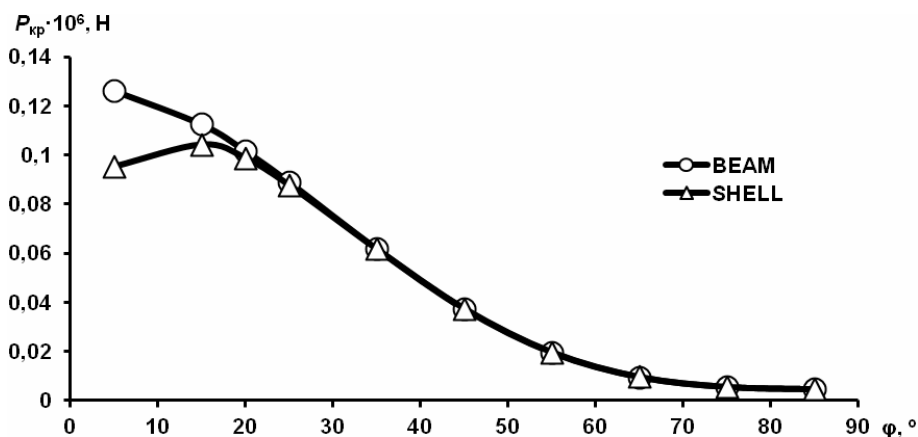


Рис. 12. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого один из торцов шарнирно-оперт, а второй заземлен с $l=1,5$ м, $d=60$ мм

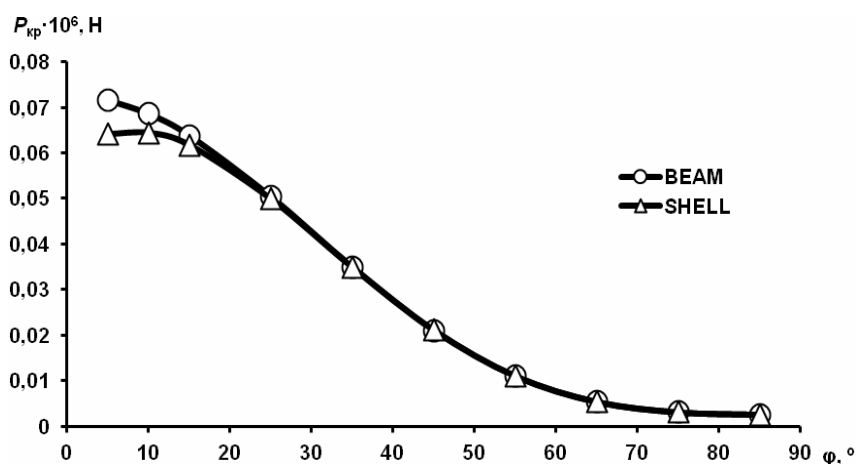


Рис. 13. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого один из торцов шарнирно-оперт, а второй заземлен с $l=2$ м, $d=60$ мм

Аналогичное исследование со стержнем, заземленным по обоим концам ($d=60$ мм) обнаружило следующее уменьшение границы применимости балочной модели по углу намотки φ : при $l=1$ м – $\varphi_{\min}=55^\circ$ (рис. 10), при $l=1,5$ м – $\varphi_{\min}=35^\circ$ (рис. 14), при $l=2$ м – $\varphi_{\min}=25^\circ$ (рис. 15).

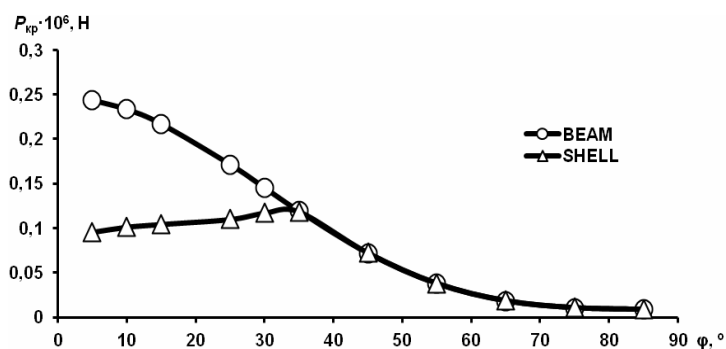


Рис. 14. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого оба края защемлены с $l=1,5$ м, $d=60$ мм

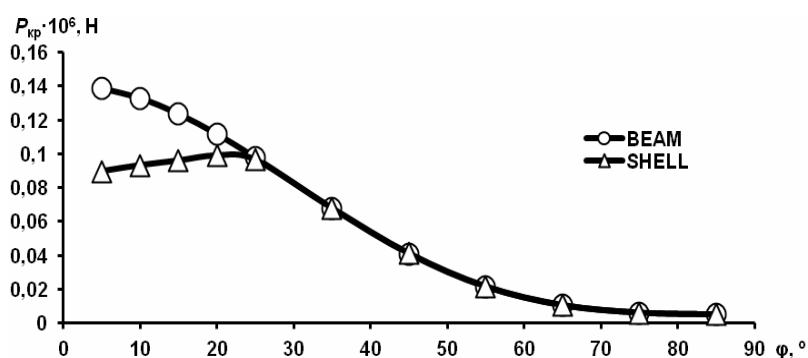


Рис. 15. Зависимость критической нагрузки от угла намотки для стержня, у которого оба края защемлены с $l=2$ м, $d=60$ мм

Несовпадение результатов расчетов на устойчивость по двум моделям (балочной и оболочечной) при малых углах намотки обусловлено завышенным значением окружного упругого параметра в балочной модели. В действительности (в оболочечной модели, которая точно учитывает ортотропию) этот упругий параметр мал, что сказывается в снижении критической нагрузки.

При малых значениях углов намотки композитных слоев следует с осторожностью пользоваться упрощенной балочной моделью, и в самых ответственных случаях полагаться на более точную оболочечную постановку, невзирая на ее сложность и затратность. Применимость упрощенной балочной модели оправдана при комплексном проектировочном расчете, если проектировщик осведомлен о границах ее адекватности, которую можно оценить с помощью исследования, описанного в настоящей работе.

Список литературы:

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
2. Комков М.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения : учеб. пособие – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 431 с.

Поступила в редколлегию. 22.04 2015 г.