

УДК 539.4

**Т. Б. Дуйшеналиев**, д-р физ.-мат. наук, проф., **В. Е. Хроматов**, канд. техн. наук, проф.,  
**В. Э Цой**, канд. физ.-мат. наук, доц., **В. Н. Щугорев**, канд. техн. наук, доц.  
Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва, Россия  
Тел.: +7 916 498 6250; E-mail: [duishenaliyev@mail.ru](mailto:duishenaliyev@mail.ru); [DuyshenaliyevT@mpei.ru](mailto:DuyshenaliyevT@mpei.ru)

## УРАВНЕНИЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

*Предлагаемое в этой работе уравнение отличается тем, что его можно отнести к категории обоснованных, выведенных математически уравнений. Это уравнение, выражающее количественное соотношение между предельными величинами наименьшего и наибольшего главных напряжений, является весьма простым соотношением. Тем не менее, оно определяет все те напряженные состояния, которые приводят к разрушению материала. Используя это уравнение можно построить огибающую линию предельных кругов напряжений.*

**Ключевые слова:** предельные напряжения, сжатие, растяжение, напряженное состояние, разрушение, уравнение огибающей предельных кругов напряжений.

**T. B. Duishenaliyev, V. E. Khromatov, V. E. Tsoi, V. N. Shugorev**

## THE EQUATION DETERMINING LIMIT STATES OF BRITTLE MATERIALS

*The equation proposed in this paper differs in that it can be categorized as well grounded, mathematically derived equations. This equation, which expresses the quantitative ratio between the limiting values of the smallest and the greatest principal stresses, is a very simple relation. Nevertheless, it determines all those stress conditions that lead to the destruction of a material. Using this equation it is possible to construct an envelope line of stress limit circles.*

**Keywords:** critical stresses, compression, tension, stress state, destruction, equation of the envelope of stress limit circles.

### 1. Введение

Любое напряженное состояние можно изобразить на плоскости нормального и касательного напряжений. Это обстоятельство сыграло весьма позитивную роль, ибо поиск закономерности на плоскости несравнимо проще, чем в пространстве. Если любое напряженное состояние можно изобразить на плоскости, то на ней можно изобразить и те напряженные состояния, при которых разрушается исследуемый материал.

О. Мор [2] выдвинул гипотезу о том, что наибольшие круги разрушающих напряженных состояний образуют семейство, огибаемое одной линией. Эта линия получила название огибающей линии предельных кругов напряжений. Таким образом, предположение о наличии огибающей наибольших кругов разрушающих напряженных состояний является основным утверждением теории прочности Мора.

В качестве количественного выражения теории прочности Мора предлагается много соотношений, выдвинутых на основе различных соображений. Зачастую вначале задаются типом зависимости, а затем определяются константы [5,6]. Все эти зависимости удовлетворительно описывают опытные данные вблизи тех напряженных состоя-

ний, которые использовались при определении констант. С удалением от этих напряженных состояний несоответствия все более и более возрастают [2].

## 2. Уравнение огибающей линии предельных кругов Мора в параметрической форме

Обозначим главные напряжения через  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , считая сжимающие напряжения как положительные. Уравнение предельных кругов имеет вид [1,2]:

$$\sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_3 = 0. \quad (1)$$

Для того чтобы семейство кругов (1) имело общую огибающую линию, оно должно определяться одним параметром. В качестве параметра выберем одно из главных напряжений, например,  $\sigma_1$ .

Для наличия огибающей линии предельных кругов напряжений необходимо, чтобы частная производная уравнения (1) по выбранному параметру была равна нулю:

$$-1(+\sigma'_1)\sigma + (\sigma_3 + \sigma_1\sigma'_3) = 0.$$

Отсюда находим:

$$\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1\sigma'_3}{1 + \sigma'_3}. \quad (2)$$

Подставим (2) в уравнение (1):

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma'_3} \sqrt{\sigma'_3}. \quad (3)$$

Выражения (2), (3) представляют собой уравнение огибающей предельных кругов Мора в параметрической форме.

## 3. Функция, служащая параметром в уравнении огибающей линии предельных кругов Мора

Допустим, что из уравнений (2) и (3) удалось исключить параметр  $\sigma_1$ , а также, определяемые этим параметром, функции  $\sigma_3(\sigma_1), \sigma'_3(\sigma_1)$ . Это привело бы к явному уравнению огибающей линии:

$$\tau = \tau(\sigma). \quad (4)$$

Подставим (4) в уравнение (1):

$$\sigma^2 + \tau(\sigma)^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_3 = 0. \quad (5)$$

Теперь на выражение (5) можно смотреть как на уравнение между главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_3$ , которое содержит параметр  $\sigma$ . Задавая этому параметру разные значения, получим кривую на плоскости  $\sigma_1, \sigma_3$ , т.е.:

$$\sigma_3 = \sigma_3(\sigma), \quad (6)$$

$$\sigma_s = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a-b)^2}{8} + \sigma_1^2}. \quad (7)$$

Допустим, величины констант  $a, b$  для данного материала известны. В этом случае, задаваясь величинами  $\sigma_1$  в пределах  $0 \leq \sigma_1 < \infty$  и, вычисляя соответствующие им величины  $\sigma_s$ , можно определить все предельные напряженные состояния. Можно построить и огибающую линию по следующим уравнениям:

$$\sigma = \frac{\sigma_s + \sigma_1 \sigma'_s}{1 + \sigma'_s}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_1 + \sigma_s}{1 + \sigma'_s} \sqrt{\sigma'_s}, \quad (8)$$

где 
$$\sigma_s = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a-b)^2}{8} + \sigma_1^2},$$

$$\sigma'_s = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{8} + \sigma_1^2}}.$$

Это уравнение отличается от всех ранее предложенных видов [4,5,6] тем, что оно является математически выведенным.

#### 4. Определение констант по величинам главных напряжений любых двух напряженных состояний трехосного сжатия

В уравнение огибающей линии (8) механическое свойство материала входит в виде констант  $a, b$ . Эти константы можно определить через величины главных напряжений любых двух предельных состояний. Обозначим величины главных напряжений одного из этих состояний:

$$\sigma_1 = \sigma_{1r}, \quad \sigma_s = \sigma_{3r},$$

а другого:

$$\sigma_1 = \sigma_{1s}, \quad \sigma_s = \sigma_{3s}.$$

Подставляя эти величины в (7), получим два уравнения для определения двух констант. Решая их, находим:

$$a = \frac{(\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2 - (\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{1s})^2}{2(\sigma_{3r} - \sigma_{3s})} + \sqrt{\frac{((\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2)^2 - ((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{1s})^2)^2}{2(\sigma_{3r} - \sigma_{3s})^2}} -$$

$$-(\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{1s})^2 + (\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2,$$

$$b = \frac{(\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2 - (\sigma_{1r})^2 + (\sigma_{1s})^2}{2(\sigma_{3r} - \sigma_{3s})} - \sqrt{\frac{((\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2)^2 - ((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{1s})^2)^2}{2(\sigma_{3r} - \sigma_{3s})^2}} -$$

$$-(\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{1s})^2 + (\sigma_{3r})^2 + (\sigma_{3s})^2. \quad (9)$$

Введем в уравнения (8) эти величины констант:

$$\sigma = \frac{\sigma_s + \sigma_1 \sigma'_s}{1 + \sigma'_s}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_1 + \sigma_s}{1 + \sigma'_s} \sqrt{\sigma'_s},$$

где:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{(\sigma_{3_r})^2 - (\sigma_{3_s})^2 - (\sigma_{1_r})^2 + (\sigma_{1_s})^2}{2(\sigma_{3_r} - \sigma_{3_s})} + \\ &+ \sqrt{\frac{(\sigma_{3_r} - \sigma_{3_s})^2}{4} + \frac{((\sigma_{1_r})^2 - (\sigma_{1_s})^2)^2}{4(\sigma_{3_r} - \sigma_{3_s})^2} - \frac{(\sigma_{1_r})^2 + (\sigma_{1_s})^2}{2} + \sigma_1^2}, \\ \sigma'_s &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{(\sigma_{3_r} - \sigma_{3_s})^2}{4} + \frac{((\sigma_{1_r})^2 - (\sigma_{1_s})^2)^2}{4(\sigma_{3_r} - \sigma_{3_s})^2} - \frac{(\sigma_{1_r})^2 + (\sigma_{1_s})^2}{2} + \sigma_1^2}} + \sigma_1^2. \end{aligned} \quad (10)$$

### 5. Определение констант по величинам предела прочности материала на осевое сжатие и главных напряжений какого-либо другого предельного напряженного состояния

Зачастую экспериментаторы ограничиваются проведением испытаний материалов только в камерах трехосного сжатия. В таких камерах образцы материалов можно довести до разрушения при осевом сжатии без бокового давления (осевое сжатие) и при осевом сжатии с приложением к боковой поверхности образца различных величин гидростатического давления. Этими испытаниями определяется предел прочности на осевое сжатие  $\sigma\sigma$ , а также ряд величин главных напряжений, при которых образец разрушается.

Для таких испытаний величины констант  $a, b$  необходимо выразить через величины предела прочности на осевое сжатие и через величины какой-либо пары главных напряжений. Пусть, в уравнении (10) в качестве главных напряжений  $\sigma_{1_s}, \sigma_{3_s}$ , взяты главные напряжения осевого сжатия:

$$\sigma_{1_s} = \sigma\sigma, \quad \sigma_{3_s} = 0,$$

где  $\sigma\sigma$  - предел прочности материала при осевом сжатии. Введем это в уравнения (10):

$$\sigma = \frac{\sigma_s + \sigma_1 \sigma'_s}{1 + \sigma'_s}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_1 + \sigma_s}{1 + \sigma'_s} \sqrt{\sigma'_s},$$

где:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{(\sigma_{3_r})^2 - (\sigma_{1_r})^2 + \sigma\sigma^2}{2\sigma_{3_r}} + \\ &+ \sqrt{\frac{((\sigma_{1_r})^2 - (\sigma_{3_r})^2)^2 + \sigma\sigma^2(\sigma\sigma^2 - 2(\sigma_{1_r})^2 - 2(\sigma_{3_r})^2)}{4\sigma_{3_r}^2} + (\sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

$$\sigma'_s = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{3r})^2)^2 + \sigma c^2 (\sigma c^2 - 2(\sigma_{1r})^2 - 2(\sigma_{3r})^2)}{4\sigma_{3r}^2} + (\sigma_1)^2}} \quad (11)$$

**6. Выражение констант уравнения огибающей линии через пределы прочности материала на осевое растяжение и на осевое сжатие**

Самыми распространенными механическими характеристиками конструкционных материалов являются пределы их прочности на осевое сжатие и на осевое растяжение, которые обозначим соответственно  $\sigma c$  и  $\sigma p$ . Подставим в уравнения (11) главные напряжения при осевом растяжении:

$$\sigma_{1r} = 0, \quad \sigma_{3r} = \sigma p.$$

При этом получим уравнение огибающей линии предельных кругов напряжений, выраженное через пределы прочности материала на осевое сжатие и на осевое растяжение:

$$\sigma = \frac{\sigma_s + \sigma_1 \sigma'_s}{1 + \sigma'_s}, \quad \tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{1 + \sigma'_s} \sqrt{\sigma'_s} \quad (12)$$

где:

$$\sigma_s = \frac{\sigma c^2 + \sigma p^2}{2 \cdot \sigma p} + \sqrt{\left(\frac{\sigma c^2 - \sigma p^2}{2 \cdot \sigma p}\right)^2 + \sigma_1^2},$$

$$\sigma'_s = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma c^2 - \sigma p^2}{2 \cdot \sigma p}\right)^2 + \sigma_1^2}}.$$

В уравнение огибающей линии (12) механическое свойство материала входит в виде пределов прочности материала на осевое сжатие и на осевое растяжение. Если величины этих пределов установлены, то уравнение (12) определяет все те напряженные состояния, которые приводят к разрушению данный материал.

**7. Определение предела прочности на осевое растяжение**

В камерах трехосного сжатия образцы материала доводятся до разрушения при различных величинах бокового (наименьшего  $\sigma_s$ ) и осевого (наибольшего  $\sigma_1$ ) главных напряжений. В таких испытаниях сначала определяется и величина предела прочности на осевое сжатие. В этом случае к боковой поверхности образца не прикладывается давление. В таких испытаниях предел прочности на осевое растяжение остается не определенным. Можно ли вычислить величину предела прочности из данных таких опытов?

Главные напряжения для осевого растяжения:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma_p,$$

где  $\sigma_p$  - предел прочности на осевое растяжение. Подставим это в третье из уравнений (11):

$$\sigma_p = \frac{(\sigma_{3_r})^2 - (\sigma_{1_r})^2 + \sigma_c^2}{2\sigma_{3_r}} + \sqrt{\frac{((\sigma_{1_r})^2 - (\sigma_{3_r})^2)^2 + \sigma_c^2(\sigma_c^2 - 2(\sigma_{1_r})^2 - 2(\sigma_{3_r})^2)}{4\sigma_{3_r}^2}}. \quad (13)$$

Здесь получено уравнение для теоретического определения предела прочности материала по данным его испытаний в камерах трехосного сжатия.

### 8. Экспериментальная состоятельность выведенного уравнения (8)

Для различия, опытные величины главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_3$  далее будем соответственно обозначать  $\sigma_1, \sigma_3$ .

Опытные данные обычно даются в виде следующих векторов:

$$\sigma_3 = (0 \quad \sigma_{3_1} \quad \sigma_{3_2} \dots \sigma_{3_n}), \quad (14)$$

$$\sigma_1 = (\sigma_c \quad \sigma_{1_1} \quad \sigma_{1_2} \dots \sigma_{1_n}), \quad (15)$$

где  $\sigma_c$  - определенная опытами величина предела прочности на осевое сжатие, а  $\sigma_{3_r}, \sigma_{1_r}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) - опытные величины предельных главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_3$ .

В какой мере выведенное уравнение (7) описывает опытные данные (14)?

Проверить это просто. Надо вычислить величины  $\sigma_3$  из уравнения (7), последовательно подставляя в него те величины  $\sigma_1$ , которые равны элементам вектора  $\sigma_1$ . При этом мы получаем расчетные величины  $\sigma_3$ . Если эти величины совпадают или незначительно отличаются от соответствующих элементов вектора  $\sigma_3$ , то уравнение (7) хорошо описывает действительное поведение материала. В этом случае оно оправдывает свое строгое математическое обоснование.

Выше приведены несколько методов вычисления расчетных величин  $\sigma_3$ . Эти вычисления можно проводить, используя:

1. уравнение (7), предварительно определив константы из уравнений (9);
2. третье из уравнений (10);
3. третье из уравнений (11);
4. третье из уравнений (12), если пределы прочности материала на осевое сжатие и растяжение установлены экспериментально, т.е. опытные данные имеют вид:

$$\sigma_3 = (\sigma_p \quad 0 \quad \sigma_{3_2} \quad \sigma_{3_3} \dots \sigma_{3_n}), \quad (16)$$

$$\sigma_1 = (0 \quad \sigma_c \quad \sigma_{1_2} \quad \sigma_{1_3} \dots \sigma_{1_n}). \quad (17)$$

Результаты вычислений по этим методам должны совпадать или иметь незначительные отклонения, обусловленные дисперсией опытных данных. Для примера здесь приведем сравнения по первому из этих методов.

Все вычисления осуществлены на ЭВМ на основе компьютерных программ в системе MathCAD [2].

Рассмотрим результаты опытов Кармана [2,4] над каррарским мрамором (здесь и далее напряжения даны в кг/см<sup>2</sup>):

$$\sigma_1 = (1360 \ 2350 \ 3150 \ 3565 \ 4055 \ 5550), \tag{18}$$

$$\sigma_3 = (0 \ 250 \ 500 \ 685 \ 845 \ 1650). \tag{19}$$

Определим константы из уравнений (9), подставив в него напряжения осевого сжатия и какого-либо одного из напряженных состояний (18):

$$a = 3043 \text{ кг/см}^2, \quad b = -18560 \text{ кг/см}^2.$$

Введем эти значения констант в уравнение (7):

$$\sigma_{p_3} = \frac{3043 - 18560}{2} + \sqrt{\frac{(3043 + 18560)^2}{8} + \sigma_1^2}.$$

Это уравнение определяет все семейство предельных состояний для каррарского мрамора при  $\sigma_1 \in 0, \dots, \infty$ . Внесем в это уравнение следующие величины предельного напряжения:

$$\sigma_1 = (0 \ 1360 \ 2350 \ 3150 \ 3565 \ 4055 \ 5550).$$

При подстановке этих величин в предыдущее уравнение получаем следующие расчетные величины наименьшего главного напряжения:

$$\sigma_{p_3} = (0 \ 233 \ 503 \ 670 \ 889 \ 1683).$$

Эти величины почти совпадают с опытными величинами (19), что наглядно видно на рис. 1:



Рисунок 1. График уравнения (7) (левый рисунок), график уравнения (7) и опытные точки (правый рисунок) для каррарского мрамора [4].

Далее построим огибающую линию по уравнениям (8) при определенных выше величинах констант  $a$ ,  $b$  и нанесем туда опытные предельные круги напряжений (рис. 2).

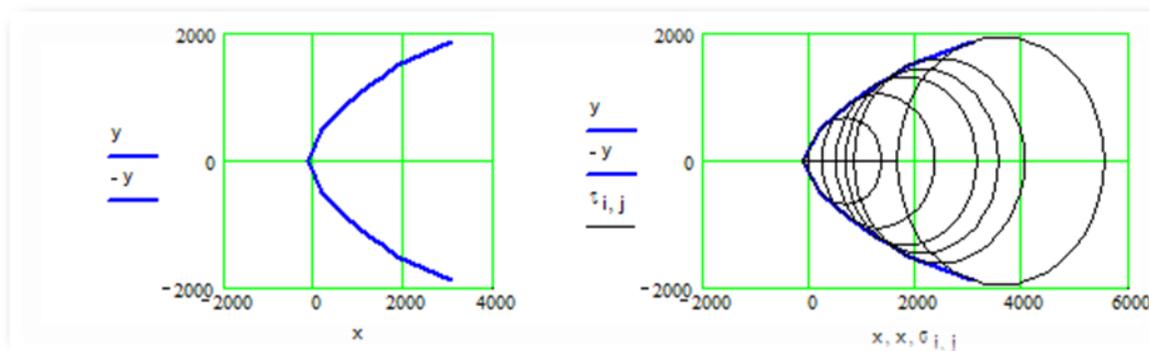


Рисунок 2. График уравнения (10) (левый рисунок), график уравнения (10) и опытные предельные круги напряжений (правый рисунок) для каррарского мрамора [4].

Из этого рис. 2 видно, как теоретическая кривая, показанная на левом рисунке, почти идеально огибает опытные предельные круги напряжений (правый рисунок).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Дуйшеналиев, Т. Б. Количественное описание теории прочности Мора [Текст] / Т.Б. Дуйшеналиев // Известия Национальной академии наук КР. – №4 . – 2012. – С. 47-50.
2. Дуйшеналиев, Т. Б. Неклассические решения механики деформируемого тела [Текст] / Т. Б.Дуйшеналиев. – М.: Издательство МЭИ, 2017. – 400 с. ISBN 978-5-7046-1840-9.
3. Дуйшеналиев, Т. Б. Уточненные соотношения критерия хрупкого разрушения Мора [Текст] / Т.Б.Дуйшеналиев, В.Е.Хроматов // Материалы XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. – М.: Издательство МАИ (НИУ), 2018. – С. 90-91.
4. Карман, Т. Опыты на всестороннее сжатие [Текст] / Т. Карман // Новые идеи в технике. Сб. статей. – 1915. – №1. – С. 51-102.
5. Койфман, М. И. и др. Прочность горных пород в объемном напряженном состоянии [Текст] / М. И. Койфман и др. – М.: Наука, 1964. – 134 с.
6. Ставрогин, А. Н. О предельных состояниях и деформации горных пород [Текст] / А. Н.Ставрогин // Горное давление. Сб. ВНИМИ. – Л., 1965. – № 59. – С. 33–62.

Поступила в редколлегию 15.05.2019 г.