

УДК 621.9.019

Р. М. Грубка, к.т.н., докторант, **И. А. Петряева**, к.т.н., асс.,
А. Н. Михайлов, д-р техн. наук, проф.
ГОУ ВПО "Донецкий национальный технический университет", ДНР
Тел./Факс: +38 (050) 6202396; E-mail: tm@fimm.donntu.org

СУММАРНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ ВНЕШНЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ НАЛИЧИЕМ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗГОТОВЛЕНИЯ, МОНТАЖА И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ

В статье приведены зависимости для определения суммарных перемещений элементов цилиндрических зубчатых передач внешнего зацепления, которые возникают в процессе эксплуатации. Перемещения вызваны наличием погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформациями элементов зубчатых передач под действием рабочей нагрузки.

Ключевые слова: цилиндрическое зубчатое колесо, суммарные перемещения, погрешности изготовления, погрешности монтажа, деформации

R. M. Grubka, I. A. Petryaeva, A. N. Mikhaylov

TOTAL DISPLACEMENT OF THE CYLINDRICAL GEARS ELEMENTS OF EXTERNAL ENGAGEMENT, CAUSED BY THE MANUFACTURING ERRORS, ERECTION AND DEFORMATIONS DURING OPERATION

The article presents the dependencies for determining the total displacements of the cylindrical gears elements of external gear that arise during operation. The movements are caused by the presence of manufacturing errors, installation errors and deformations of the gear elements under the influence of the work load.

Keywords: cylindrical gear wheel, total displacement, manufacturing errors, erection errors, deformations

1. Введение

На точность зубчатой передачи влияют не только погрешности зубчатых колес, но и погрешности других элементов передачи: валов, подшипников, корпуса и т.д. Вследствие влияния погрешностей параметры точности зубчатых передач отличаются от значений, указанных в нормативно-технической документации. Наличие погрешностей изготовления и монтажа зубчатых колес, а также перемещений вызванных деформациями элементов зубчатых передач приводят к повышению динамических нагрузок, вибрации, шуму передач и преждевременному выходу механизмов из строя и в конечном итоге к снижению нагрузочной способности.

Основными тенденциями в теории и практике проектирования и изготовления зубчатых передач в настоящее время является синтез "реальных зубчатых зацеплений", разработка теоретических подходов по формообразованию пространственно-модифицированных зубьев и анализ процессов происходящих в процессе эксплуатации зубчатых передач. Развитие теории реальных зацеплений и теории формообразования пространственных зубчатых венцов с пространственными геометриями зубьев предполагает создание универсальных методов моделирования, средств проектирования и исследования передач [1, 2], а также создания единых подходов разработки технологического обеспечения зуборезных операций.

Наличие погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформаций элементов зубчатых передач приводит к ухудшению функциональных показателей пере-

дач, которые зачастую не контролируются на производстве, что может приводить к снижению нагрузочной способности и снижению качества зубчатых передач [3].

Изучение и учёт перемещений, вызванных наличием погрешностей изготовления и монтажа, а так же вследствие наличия деформаций элементов зубчатых передач под действием рабочей нагрузки при проектировании новых конструкций колес и геометрий зубьев позволит создать их новую элементную базу и приведет к необходимости совершенствовать технологические методы изготовления элементов зубчатых передач. Реализация на практике "реального зубчатого зацепления", способного компенсировать негативное влияние погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и перемещений, вызванных деформациями элементов зубчатых передач под действием рабочей нагрузки, приведет к увеличению долговечности и надёжности машин. В связи с чем, необходимо на этапе конструирования новых цилиндрических зубчатых передач или совершенствовании конструкции применяемых передач выполнять определение предельных или вероятных погрешностей изготовления и монтажа, а также перемещений, вызванных деформациями элементов изделий с цилиндрическими зубчатыми колесами (зубьев, ободов зубчатых венцов, валов, элементов подшипников, корпусов и т.д.).

Целью работы является определение суммарных перемещений элементов цилиндрических передач внешнего зацепления, вызванных наличием погрешностей изготовления, монтажа и деформациями элементов передач в процессе эксплуатации.

2. Основное содержание и результаты работы

Шестерня в результате наличия погрешностей изготовления и монтажа, а также деформаций смещается и поворачивается относительно номинального положения в зубчатом соединении. Вместе с шестерней перемещается и поворачивается связанная с ней система координат (рис. 1) осуществляя:

- поворот относительно оси x_1^I на суммарный угол $\Sigma\phi_{x1}$;
- поворот относительно оси y_1^{II} на суммарный угол $\Sigma\phi_{y1}$;
- перемещение относительно трех координатных осей абсолютной системы координат на величину суммарного перемещения соответственно $\Sigma\Delta x_1, \Sigma\Delta y_1, \Sigma\Delta z_1$;
- для рассмотрения элементов шестерни в абсолютной системе координат начало координат системы переносится в полюс зацепления P.

Матрицы перехода от системы координат $S_I(x_1, y_1, z_1)$ связанной с шестерней к абсолютной системе координат $S(X, Y, Z)$:

- при повороте относительно оси x_1^I на суммарный угол $\Sigma\phi_{x1}$:

$$M_{\Sigma\phi_{x1}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Sigma\phi_{x1} & \sin \Sigma\phi_{x1} & 0 \\ 0 & -\sin \Sigma\phi_{x1} & \cos \Sigma\phi_{x1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \tag{1}$$

- при повороте относительно оси y_1^{II} на суммарный угол $\Sigma\phi_{y1}$:

$$M_{\Sigma\phi_{y1}} = \begin{vmatrix} \cos \Sigma\phi_{y1} & 0 & \sin \Sigma\phi_{y1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \Sigma\phi_{y1} & 0 & \cos \Sigma\phi_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

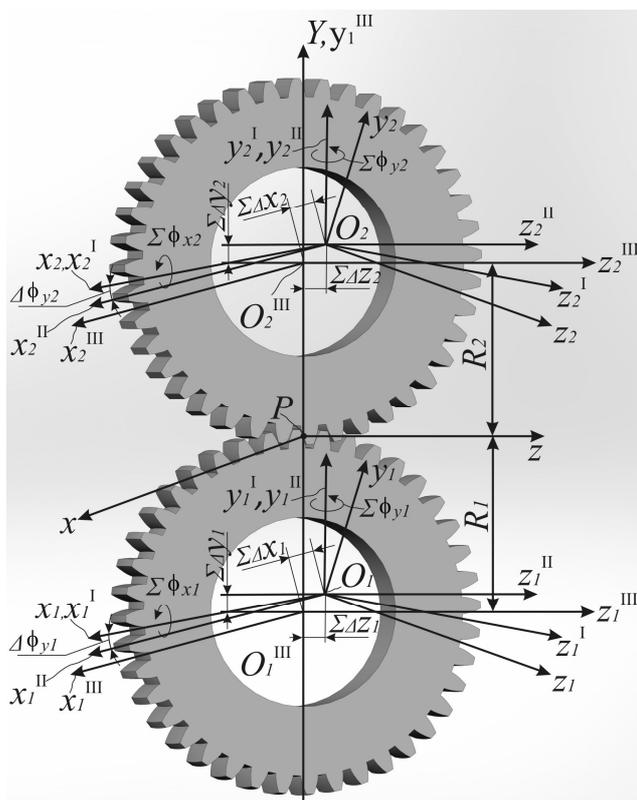


Рисунок 1. Системы координат для определения суммарных погрешностей изготовления, монтажа и перемещений, возникающих вследствие деформаций в процессе эксплуатации элементов зубчатых передач внешнего зацепления

- при перемещении относительно трех координатных осей абсолютной системы координат на величины суммарных перемещений $\Sigma\Delta x_1, \Sigma\Delta y_1, \Sigma\Delta z_1$:

$$M_{cm1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \Sigma\Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \Sigma\Delta y_1 \\ 0 & 0 & 1 & \Sigma\Delta z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (3)$$

- при переносе системы координат в полюс зацепления P .

$$M_{P1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -R_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Найдя произведение матриц $M_{\Sigma\phi_{x1}}, M_{\Sigma\phi_{y1}}, M_{cm1}$, и M_{P1} получим матрицу перехода от системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ связанной с шестерней к абсолютной системе координат $S(X, Y, Z)$:

$$M_{\Sigma 1} = M_{P1} M_{cm1} M_{\Sigma\phi_{y1}} M_{\Sigma\phi_{x1}} = \begin{vmatrix} m1_{11} & m1_{12} & m1_{13} & m1_{14} \\ m1_{21} & m1_{22} & m1_{23} & m1_{24} \\ m1_{31} & m1_{32} & m1_{33} & m1_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где:

$$\begin{aligned} m1_{11} &= \cos \Sigma\phi_{y1}; \\ m1_{12} &= -\sin \Sigma\phi_{x1} \sin \Sigma\phi_{y1}; \\ m1_{13} &= \cos \Sigma\phi_{x1} \sin \Sigma\phi_{y1}; \\ m1_{14} &= \Sigma\Delta x_1; \\ m1_{21} &= 0; \\ m1_{22} &= \cos \Sigma\phi_{x1}; \\ m1_{23} &= \sin \Sigma\phi_{x1}; \\ m1_{24} &= \Sigma\Delta y_1 - R_1; \\ m1_{31} &= -\sin \Sigma\phi_{y1}; \\ m1_{32} &= -\cos \Sigma\phi_{y1} \sin \Sigma\phi_{x1}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$m1_{33} = \cos \Sigma \phi_{x1} \cos \Sigma \phi_{y1};$$

$$m1_{34} = \Sigma \Delta z_1.$$

В результате преобразования матриц получим систему уравнений для перехода от системы координат $S_I(x_I, y_I, z_I)$ связанной с шестерней к абсолютной системе координат $S(X, Y, Z)$:

$$\left. \begin{aligned} X &= m1_{11}x_1 + m1_{12}y_1 + m1_{13}z_1 + m1_{14}; \\ Y &= m1_{22}y_1 + m1_{23}z_1 + m1_{24}; \\ Z &= m1_{31}x_1 + m1_{32}y_1 + m1_{33}z_1 + m1_{34}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Матрица перехода от абсолютной системы координат $S(X, Y, Z)$ к системе координат $S_I(x_I, y_I, z_I)$ связанной с шестерней (зубчатой втулкой) имеет вид:

$$M_{\Sigma I}' = (M_{P_1} M_{cm1} M_{\Sigma \phi_{y1}} M_{\Sigma \phi_{x1}})^{-1} = \begin{vmatrix} m1'_{11} & m1'_{12} & m1'_{13} & m1'_{14} \\ m1'_{21} & m1'_{22} & m1'_{23} & m1'_{24} \\ m1'_{31} & m1'_{32} & m1'_{33} & m1'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где:

$$\begin{aligned} m1'_{11} &= \cos \Sigma \phi_{y1}; \\ m1'_{12} &= 0; \\ m1'_{13} &= -\sin \Sigma \phi_{y1}; \\ m1'_{14} &= \Sigma \Delta z_1 \sin \Sigma \phi_{y1} - \Sigma \Delta x_1 \cos \Sigma \phi_{y1}; \\ m1'_{21} &= -\sin \Sigma \phi_{x1} \sin \Sigma \phi_{y1}; \\ m1'_{22} &= \cos \Sigma \phi_{x1}; \\ m1'_{23} &= -\cos \Sigma \phi_{y1} \sin \Sigma \phi_{x1}; \\ m1'_{24} &= R_1 \cos \Sigma \phi_{x1} - \Sigma \Delta y_1 \cos \Sigma \phi_{x1} + \\ &+ \Sigma \Delta z_1 \cos \Sigma \phi_{y1} \sin \Sigma \phi_{x1} + \Sigma \Delta x_1 \sin \Sigma \phi_{x1} \sin \Sigma \phi_{y1}; \\ m1'_{31} &= \cos \Sigma \phi_{x1} \sin \Sigma \phi_{y1}; \\ m1'_{32} &= \sin \Sigma \phi_{x1}; \\ m1'_{33} &= \cos \Sigma \phi_{x1} \cos \Sigma \phi_{y1}; \\ m1'_{34} &= R_1 \sin \Sigma \phi_{x1} - \Sigma \Delta y_1 \sin \Sigma \phi_{x1} - \\ &- \Sigma \Delta z_1 \cos \Sigma \phi_{x1} \cos \Sigma \phi_{y1} - \Sigma \Delta x_1 \cos \Sigma \phi_{x1} \sin \Sigma \phi_{y1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений при переходе от абсолютной системы координат $S(X, Y, Z)$ к системе координат $S_I(x_I, y_I, z_I)$ связанной с шестерней:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= m1'_{11}X + m1'_{13}Z + m1'_{14}; \\ y_1 &= m1'_{21}X + m1'_{22}Y + m1'_{23}Z + m1'_{24}; \\ z_1 &= m1'_{31}X + m1'_{32}Y + m1'_{33}Z + m1'_{34}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Зубчатому колесу присущи подобные шестерне погрешности изготовления и монтажа, а так же перемещения, возникающие в процессе эксплуатации (рис. 1.). Значит, для зубчатого колеса можно записать зависимости (7) и (10) с учетом суммарных перемещений и повторов второго колеса $\Sigma \Delta x_2, \Sigma \Delta y_2, \Sigma \Delta z_2, \Sigma \phi_{x2}, \Sigma \phi_{y2}$.

Величины суммарного перемещения по соответствующим осям определяются по зависимостям:

- для оси OX :

$$\Delta x_{\Sigma} = \Sigma \Delta x_2 - \Sigma \Delta x_1; \quad (11)$$

- для оси OY :

$$\Delta y_{\Sigma} = \Sigma \Delta y_2 - \Sigma \Delta y_1; \quad (12)$$

- для оси OZ :

$$\Delta z_{\Sigma} = \Sigma \Delta z_2 - \Sigma \Delta z_1, \quad (13)$$

где $\Sigma \Delta x_1$, $\Sigma \Delta x_2$ - суммарные перемещения вдоль оси OX абсолютной системы координат:

$$\Sigma \Delta x_1 = \Delta_{x_k11} + \Delta_{x_k12} + \Delta_{x_k13}, \quad (14)$$

$$\Sigma \Delta x_2 = \Delta_{x_k21} + \Delta_{x_k22} + \Delta_{x_k23}, \quad (15)$$

где $\Delta_{x_k11}, \Delta_{x_k12}, \Delta_{x_k13}$ - перемещения шестерни вдоль оси OX , вызванные наличием соответственно погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформациями элементов передачи, которые возникают в процессе эксплуатации;

$\Delta_{x_k21}, \Delta_{x_k22}, \Delta_{x_k23}$ - перемещения зубчатого колеса вдоль оси OX , вызванные наличием соответственно погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформациями элементов передачи, которые возникают в процессе эксплуатации;

$\Sigma \Delta y_1$, $\Sigma \Delta y_2$ - суммарные перемещения вдоль оси OY абсолютной системы координат:

$$\Sigma \Delta y_1 = \Delta_{y_k11} + \Delta_{y_k12} + \Delta_{y_k13}, \quad (16)$$

$$\Sigma \Delta y_2 = \Delta_{y_k21} + \Delta_{y_k22} + \Delta_{y_k23}, \quad (17)$$

где $\Delta_{y_k11}, \Delta_{y_k12}, \Delta_{y_k13}$ - перемещения шестерни вдоль оси OY , вызванные наличием соответственно погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформациями элементов передачи, которые возникают в процессе эксплуатации;

$\Delta_{y_k21}, \Delta_{y_k22}, \Delta_{y_k23}$ - перемещения зубчатого колеса вдоль оси OY , вызванные наличием соответственно погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформациями элементов передачи, которые возникают в процессе эксплуатации;

$\Sigma \Delta z_1$, $\Sigma \Delta z_2$ - суммарные перемещения вдоль оси OZ абсолютной системы координат:

$$\Sigma \Delta z_1 = \Delta_{z_k11} + \Delta_{z_k12} + \Delta_{z_k13}, \quad (18)$$

$$\Sigma \Delta z_2 = \Delta_{z_k21} + \Delta_{z_k22} + \Delta_{z_k23}, \quad (19)$$

где $\Delta_{z_k11}, \Delta_{z_k12}, \Delta_{z_k13}$ - перемещения шестерни вдоль оси OZ , вызванные наличием соответственно погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформациями элементов передачи, которые возникают в процессе эксплуатации;

$\Delta_{z_k21}, \Delta_{z_k22}, \Delta_{z_k23}$ - перемещения зубчатого колеса вдоль оси OZ , вызванные наличием соответственно погрешностей изготовления, погрешностей монтажа и деформациями элементов передачи, которые возникают в процессе эксплуатации.

Угол между соответствующими осями шестерни и зубчатого колеса определяется в соответствии с зависимостью [4, 5]:

$$\cos \phi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}, \quad (20)$$

где l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 - направляющие косинусы соответствующей оси системы координат связанной с шестерней и зубчатым колесом.

Определив координаты точек O_1 и O_2 в абсолютной системе координат, а также координат точек принадлежащих осям $O_1x_1, O_1y_1, O_2x_2, O_2y_2$ систем координат шестерни и зубчатого колеса найдем значения направляющих косинусов. Подставив значения направляющих косинусов в зависимость (20) получим формулы для определения суммарных углов перекоса:

- относительно оси O_1x_1 :

$$\phi_{x\Sigma} = \Sigma\phi_{y1} - \Sigma\phi_{y2}; \quad (21)$$

- относительно оси O_1y_1 :

$$\phi_{y\Sigma} = \arccos(\cos(\Sigma\phi_{x1})\cos(\Sigma\phi_{x2}) + \cos(\Sigma\phi_{y1})\cos(\Sigma\phi_{y2})\sin(\Sigma\phi_{x1})\sin(\Sigma\phi_{x2}) + \sin(\Sigma\phi_{x1})\sin(\Sigma\phi_{x2})\sin(\Sigma\phi_{y1})\sin(\Sigma\phi_{y2})). \quad (22)$$

Второе и третье слагаемое в выражении (22) стремятся к нулю при малых значениях углов перекоса соединения и в итоге получим зависимость:

$$\phi_{y\Sigma} = \arccos(\cos(\Sigma\phi_{x1})\cos(\Sigma\phi_{x2})). \quad (23)$$

3. Выводы

Таким образом, получены зависимости по определению суммарных погрешностей вызванных наличием погрешностей изготовления, монтажа и перемещениями вследствие деформаций в процессе эксплуатации, для цилиндрических зубчатых передач внешнего зацепления. Использование приведенных в работе зависимостей позволяет на этапе конструирования зубчатых передач и расчетах геометрии боковой поверхности зубьев учитывать предельные или вероятные величины составляющих погрешностей изготовления и монтажа, а также перемещений, вызванных деформациями элементов изделий с цилиндрическими зубчатыми колесами. Учёт составляющих погрешностей позволит разрабатывать более совершенные конструкции цилиндрических зубчатых соединений с пространственной геометрией зубьев, обладающей большей компенсирующей и несущей способностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдфарб, В. И. Теория и практика зубчатых передач в теории машин и механизмов / В. И. Гольдфарб // Интеллектуальные системы в производстве. – 2011. – № 2 (18). – С. 95-100.
2. Бабичев, Д. Т. История развития теории зубчатых передач / Д. Т. Бабичев, А. Э. Волков // Вестник научно-технического развития. – 2015. – С. 25-42.
3. Абрамчук, М. В. Вероятностный метод расчета параметров точности эвольвентных цилиндрических зубчатых передач / М. В. Абрамчук // Известия высших учебных заведений. Приборостроение, 2016. – Т. 59. – № 8. – С. 619-624.
4. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1968. — 395 с.
5. Судавная, О. Краткий справочник по математике для абитуриентов и студентов. Формулы, алгоритмы, примеры. — СПб.: Питер, 2013. — 320 с.

Поступила в редколлегию 7.02.2018 г.