

УДК 621.914.2

**Р. М. Грубка**, канд. техн. наук, докторант, **И. А. Петряева**, канд. техн. наук, ассистент, **А. Н. Михайлов**, д - р техн. наук, профессор.

Донецкий национальный технический университет, ДНР

Тел./Факс: +38 (050) 6202396; E-mail: [tm@fimm.donntu.org](mailto:tm@fimm.donntu.org)

## АПРОКСИМАЦИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК ПРОФИЛЯ ДИСКОВОЙ ЗУБОРЕЗНОЙ МОДУЛЬНОЙ ФРЕЗЫ СПЛАЙНАМИ БЕЗЬЕ

*В статье приведены зависимости для аппроксимации координат точек принадлежащих профилю зуба дисковой модульной фрезы сплайнами Безье пятого порядка. На примере стандартного инструмента оценена точность выполнения аппроксимации геометрии профиля зуба дисковой модульной фрезы сплайном Безье пятого порядка.*

**Ключевые слова:** дисковая модульная фреза, аппроксимация, сплайн Безье, режущая кромка, цилиндрическое зубчатое колесо, система уравнений

**R. M. Grubka, I. A. Petryaeva, A. N. Mikhaylov**

## APPROXIMATION OF POINTS COORDINATES PROFILE BY DISK MODULAR MILLING CUTTER WITH BEZIER SPLINES

*The article presents the dependencies for the approximation of the coordinates of points belonging to the profile of disk modular milling cutter with Bezier splines of the fifth order. Using the example of a standard tool, the accuracy of the approximation of the profile geometry of disk modular milling cutter with a Bezier spline of the fifth order is estimated.*

**Keywords:** disk modular milling cutter, approximation, Bezier spline, cutting edge, cylindrical gear wheel, system of equations

### 1. Введение

В современном машиностроении всё большее применение находят зубчатые передачи и соединения различной формы и структуры, в том числе и цилиндрические зубчатые передачи с пространственно-модифицированными зубьями. Многообразие возможных вариантов пространственной модификации зависит от большого количества эксплуатационных и производственных факторов и приводит к необходимости совершенствовать существующие и разрабатывать новые методики математического описания, как самих геометрий боковой поверхности зубьев, так и процессов происходящих во время формообразования зубчатых венцов и во время эксплуатации изделий с зубчатыми венцами.

В процессе обработки на зуборезный инструмент действуют значительные и неравномерно распределенные по режущей кромке нагрузки. Анализ закономерностей изменения параметров срезаемого слоя и силового нагружения режущих кромок инструментов, особенно при решении пространственных технологических задач на различных этапах технологического процесса, может способствовать интенсификации режимов резания, выравниванию нагрузки, повышению качества обработки зубчатых венцов, управлению параметрами поверхностного слоя обрабатываемых поверхностей, совершенствованию геометрии режущей части инструмента, совершенствованию технологического оборудования и процессов формообразования изделий с зубчатыми венцами.

Развитию методов анализа процессов зубообработки не способствует сложность как геометрии самих изделий, геометрии режущего инструмента так и кинематики относительных движений инструмента и заготовки. Поэтому возникает необходимость в

выборе таких методов описания процессов формообразования, зависимостей для описания геометрии рабочих поверхностей зубьев и режущих инструментов, которые наилучшим образом используют возможности современных компьютерных технологий, что в конечном счете определяет актуальность представленной работы.

Геометрия профиля инструмента, в том числе и зуборезного, такого как дисковая модульная фреза, задается координатным или матрично-векторным способами. Координатным способом профиль зуба дисковой модульной фрезы принято задавать в виде радиусов окружностей в сечении поверхностью параллельной торцовой поверхности фрезы и расстояний до этих сечений от оси симметрии фрезы или в виде таблицы значений координат [1, 2]. Т.е. задание профиля координатами выполняется дискретно. Такое задание профиля в основном применяется при построении двумерных изображений. В этом случае проведение автоматических расчетов различного вида, с участием координат точек принадлежащих режущей кромке инструмента имеет ряд существенных ограничений, так как получение результатов может быть только для ограниченного количества таких точек.

Матрично-векторный способ задания геометрии профиля зуборезного инструмента позволяет задавать множество точек принадлежащих режущей кромке инструмента. При этом геометрия режущей части инструмента задается в виде функций координат точек, что в значительной мере способствует автоматизации проводимых расчетов и позволяет получать непрерывную последовательность значения координат точек принадлежащих режущей кромке инструмента [3, 4, 5]. Однако, чем сложнее геометрия режущей кромки, особенно в случае зуборезного инструмента, когда кромка состоит из нескольких участков с различной геометрией (сопряжение прямолинейных участков, дуг окружностей и эвольвентного участка) каждый из участков описывается собственной системой уравнений. Что ведет к увеличению количества расчетных модулей и выполняемых операций в соответствии с количеством участков на режущей кромке. Кроме того отдельное рассмотрение участков в трехмерных постановках технологических задач не позволяет в одном расчетном модуле или подпрограмме рассчитать некоторые величины, например параметры среза, в местах сопряжения двух соседних участков режущей кромки фрезы.

В технологических задачах, особенно в трехмерной постановке, где рассматриваются взаимодействие режущего инструмента со сложной геометрической формой профиля и заготовки желательнее рассматривать аналитически описанные гладкие, дважды и более дифференцируемые кривые, с минимальным количеством управляемых элементов. Так в работе [6] в качестве универсального способа описания геометрии профиля зуба цилиндрического зубчатого колеса предлагаются кривые Безье, которые широко используются в системах автоматизированного проектирования. Применение кривых Безье обусловлено рядом их свойств [7, 8].

Таким образом, геометрия режущей кромки дисковой модульной фрезы является объектом, состоящим из сопряжений прямолинейного участка (или нескольких участков), дуг окружности и эвольвентного участка. Существующие методы описания геометрии режущей кромки имеют ряд ограничений не позволяющих в полной мере использовать автоматические методы расчета таких параметров как параметры срезаемого слоя.

**Целью работы** является аппроксимация геометрии профиля зуба дисковой зуборезной модульной фрезы гладкой кривой в виде сплайна Безье 5-го порядка.

## 2. Основное содержание и результаты работы

В нормативно-технической документации на дисковые модульные фрезы приводятся три варианта геометрии режущей кромки [2]. Геометрия режущей кромки выбирается в зависимости от количества зубьев обрабатываемого зубчатого колеса. В на-

стоящей статье рассмотрим вариант профиля зуба дисковой модульной фрезы для числа зубьев обрабатываемого колеса изменяющегося в пределах от 17 до 79 шт. рис. 1.

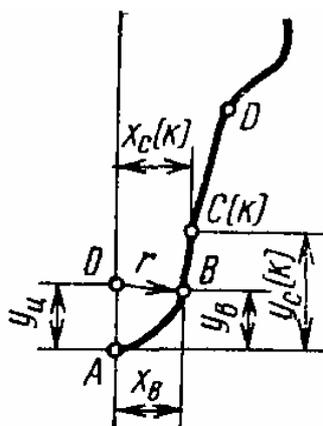


Рисунок 1. Профиль зуба стандартной дисковой зуборезной модульной фрезы при  $17 \leq z \leq 79$

Из рис. 1 видно, что профиль зуба дисковой модульной фрезы состоит из нескольких участков: дуги окружности, прямолинейного участка и эвольвентного участка. Геометрия каждого из участков задается в нормативно-технической документации таблично - координатами узловых точек, для участка дуги окружности так же задаются координаты центра окружности [2].

Каждый участок профиля зуба фрезы можно аппроксимировать с высокой степенью точности сплайнами Безье различного порядка. Так для описания прямолинейного участка режущей кромки достаточно сплайна Безье первого порядка. Для описания криволинейных участков, как правило, используют сплайны третьего порядка. Таким образом, для аналитического описания прямолинейного участка необходимо знать координаты двух точек, определяющих концы рассматриваемого отрезка. Для описания криволинейных участков необходимо задаваться 4 точками на каждой кривой.

Исходя из этого для аппроксимации профиля зуба дисковой модульной фрезы, представленного на рис. 1 необходимо использовать сплайн Безье не менее чем 5 порядка.

Сплайн Безье пятого порядка определяется зависимостью вида [7, 8]:

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{N=5} J_i^N(\lambda) \cdot P_i, \tag{1}$$

где  $\lambda$  – параметр сплайна Безье,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ;

$N$  – степень полинома, в рассматриваемом случае  $N=5$ ;

$P_i$  – координаты опорных точек, количество опорных точек в рассматриваемом случае равно  $N+1=6$ ;

$J_i^N(\lambda)$  – аппроксимирующие многочлены Бернштейна, равны:

$$J_i^N(\lambda) = C_i^N \cdot \lambda^i \cdot (1 - \lambda)^{N-i},$$

где  $C_i^N$  - биномиальные коэффициенты

$$C_i^N = \frac{N!}{i! \cdot (N - i)!}$$

Биномиальные коэффициенты для сплайна Безье пятого порядка составят:

$$C_0^5 = 1; C_1^5 = 5; C_2^5 = 10; C_3^5 = 10; C_4^5 = 5; C_5^5 = 1.$$

Аппроксимирующие многочлены Бернштейна сплайна Безье пятого порядка:

$$\begin{aligned} J_0^5(\lambda) &= (1 - \lambda)^5; J_1^5(\lambda) = 5 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4; J_2^5(\lambda) = 10 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3; \\ J_3^5(\lambda) &= 10 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2; J_4^5(\lambda) = 5 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda); J_5^5(\lambda) = \lambda^5. \end{aligned} \tag{2}$$

С учетом найденных аппроксимирующих многочленов Бернштейна (2) зависимость (1) примет вид:

$$P(\lambda) = P_0 \cdot (1 - \lambda)^5 + 5P_1 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 10P_2 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 + 10P_3 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 5P_4 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + P_5 \cdot \lambda^5. \quad (3)$$

Записав уравнение (3) для каждой из координат рассматриваемой точки на профиле зуба дисковой модульной фрезы получим систему для определения координат режущей кромки в Декартовой системе координат:

$$\begin{cases} X(\lambda) = Xp_0 \cdot (1 - \lambda)^5 + 5Xp_1 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 10Xp_2 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 + \\ \quad + 10Xp_3 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 5Xp_4 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + Xp_5 \cdot \lambda^5, \\ Y(\lambda) = Yp_0 \cdot (1 - \lambda)^5 + 5Yp_1 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 10Yp_2 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 + \\ \quad + 10Yp_3 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 5Yp_4 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + Yp_5 \cdot \lambda^5. \end{cases} \quad (4)$$

Неизвестными в системе уравнений (4) являются: параметры сплайна  $\lambda_0 - \lambda_7$  и координаты опорных точек  $Xp_1 - Xp_4, Yp_1 - Yp_4$ . Задаются координаты начала и конца кривой профиля зуба дисковой модульной фрезы  $Xp_0$  и  $Xp_5, Yp_0$  и  $Yp_5$ . Таким образом, в систему (4) входит 9 неизвестных и для определения координат опорных точек и значений параметров сплайна  $\lambda_i$  необходимо записать уравнения системы (4) для координат 8-ми точек, лежащих на профиле зуба дисковой модульной фрезы, с учетом координат точек начала и конца кривой профиля  $Xp_0$  и  $Xp_5, Yp_0$  и  $Yp_5$ :

$$\begin{cases} X(\lambda_0) = Xp_0 \cdot (1 - \lambda_0)^5 + 5Xp_1 \cdot \lambda_0 \cdot (1 - \lambda_0)^4 + 10Xp_2 \cdot \lambda_0^2 \cdot (1 - \lambda_0)^3 + \\ \quad + 10Xp_3 \cdot \lambda_0^3 \cdot (1 - \lambda_0)^2 + 5Xp_4 \cdot \lambda_0^4 \cdot (1 - \lambda_0) + Xp_5 \cdot \lambda_0^5; \\ Y(\lambda_0) = Yp_0 \cdot (1 - \lambda_0)^5 + 5Yp_1 \cdot \lambda_0 \cdot (1 - \lambda_0)^4 + 10Yp_2 \cdot \lambda_0^2 \cdot (1 - \lambda_0)^3 + \\ \quad + 10Yp_3 \cdot \lambda_0^3 \cdot (1 - \lambda_0)^2 + 5Yp_4 \cdot \lambda_0^4 \cdot (1 - \lambda_0) + Yp_5 \cdot \lambda_0^5; \\ X(\lambda_1) = Xp_0 \cdot (1 - \lambda_1)^5 + 5Xp_1 \cdot \lambda_1 \cdot (1 - \lambda_1)^4 + 10Xp_2 \cdot \lambda_1^2 \cdot (1 - \lambda_1)^3 + \\ \quad + 10Xp_3 \cdot \lambda_1^3 \cdot (1 - \lambda_1)^2 + 5Xp_4 \cdot \lambda_1^4 \cdot (1 - \lambda_1) + Xp_5 \cdot \lambda_1^5; \\ Y(\lambda_1) = Yp_0 \cdot (1 - \lambda_1)^5 + 5Yp_1 \cdot \lambda_1 \cdot (1 - \lambda_1)^4 + 10Yp_2 \cdot \lambda_1^2 \cdot (1 - \lambda_1)^3 + \\ \quad + 10Yp_3 \cdot \lambda_1^3 \cdot (1 - \lambda_1)^2 + 5Yp_4 \cdot \lambda_1^4 \cdot (1 - \lambda_1) + Yp_5 \cdot \lambda_1^5; \\ \dots \\ X(\lambda_7) = Xp_0 \cdot (1 - \lambda_7)^5 + 5Xp_1 \cdot \lambda_7 \cdot (1 - \lambda_7)^4 + 10Xp_2 \cdot \lambda_7^2 \cdot (1 - \lambda_7)^3 + \\ \quad + 10Xp_3 \cdot \lambda_7^3 \cdot (1 - \lambda_7)^2 + 5Xp_4 \cdot \lambda_7^4 \cdot (1 - \lambda_7) + Xp_5 \cdot \lambda_7^5; \\ Y(\lambda_7) = Yp_0 \cdot (1 - \lambda_7)^5 + 5Yp_1 \cdot \lambda_7 \cdot (1 - \lambda_7)^4 + 10Yp_2 \cdot \lambda_7^2 \cdot (1 - \lambda_7)^3 + \\ \quad + 10Yp_3 \cdot \lambda_7^3 \cdot (1 - \lambda_7)^2 + 5Yp_4 \cdot \lambda_7^4 \cdot (1 - \lambda_7) + Yp_5 \cdot \lambda_7^5. \end{cases} \quad (5)$$

Подставив в левую часть уравнений вместо функций  $X(\lambda_i)$  и  $Y(\lambda_i)$  значения координат узловых точек участков профиля дисковой модульной фрезы, а в правую известные данные, получим систему для определения неизвестных параметров системы уравнений сплайна Безье пятого порядка.

Проведем расчеты по определению параметров сплайна, позволяющего выполнить аппроксимацию профиля зуба дисковой модульной фрезы предназначенной для обработки зубчатого венца с числом зубьев 40 шт. и модулем 3 мм. Рассмотрим левый

профиль режущего инструмента. Координаты точек на режущей кромке стандартной дисковой фрезы при числе зубьев нарезаемого колеса от 17 до 79шт, модуль 3 мм приведены в таблице 1.

Таблица 1. Координаты точек на левом профиле зуба стандартной дисковой модульной фрезы при числе зубьев нарезаемого колеса от 17 до 79шт, модуль 3 мм

№ точки	0	1	2	3	4	5	6	7
X, мм	0	-0,738	-1,386	-1,587	-1,616	-1,666	-1,744	-1,829
Y, мм	0	0,177	0,776	1,277	1,406	1,622	1,920	2,217
№ точки	8	9	10	11	12	13	14	15
X, мм	-1,922	-2,022	-2,129	-2,243	-2,362	-2,487	-2,619	-2,756
Y, мм	2,514	2,810	3,106	3,402	3,697	3,991	4,285	4,579
№ точки	16	17	18	19	20	21	22	
X, мм	-2,898	-3,045	-3,199	-3,356	-3,519	-3,687	-3,860	
Y, мм	4,872	5,164	5,456	5,747	6,037	6,327	6,616	

Точки с номерами от 0 до 3 принадлежат участку дуги профиля зуба, точки с 3 по 4 прямолинейному отрезку, точки с 4 по 22 эвольвентному участку.

Подставив в левую часть уравнений системы (5) вместо функций  $X(\lambda_i)$  и  $Y(\lambda_i)$  значения координат узловых точек участков профиля дисковой модульной фрезы с номерами: 0, 1, 2, 3, 4, 10, 16 и 22 получим систему для определения параметров сплайна Безье пятого порядка описывающего геометрию кривой профиля зуба рассматриваемой дисковой модульной фрезы. Данную систему можно решить численными методами в математическом пакете MathCAD. В результате расчета получим неизвестные параметры сплайна (табл. 2).

Таблица 2. Результаты расчета параметров сплайна

$Xp_1$ , мм	$Yp_1$ , мм	$Xp_2$ , мм	$Yp_2$ , мм	$Xp_3$ , мм	$Yp_3$ , мм	$Xp_4$ , мм	$Yp_4$ , мм
-1,315	-0,236	-1,847	2,329	-1,545	-0,376	-0,971	1,882
$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
0	0,13342	0,35370	0,57045	0,60347	0,80990	0,91902	1

Подставив полученные в результате решения системы уравнений (5) координаты опорных точек в систему уравнений (4) получим зависимости для определения координат точек описывающих геометрию профиля зуба дисковой модульной фрезы, которая предназначена для обработки цилиндрических зубчатых колес с числом зубьев от 17 до 79 шт и модулем 3 мм:

$$\begin{cases} X(\lambda) = -6,575 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 - 18,47 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 - \\ -15,45 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 - 4,855 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) - 3,860 \cdot \lambda^5, \\ Y(\lambda) = -1,18 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 23,29 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 - \\ -3,76 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 9,41 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + 6,616 \cdot \lambda^5. \end{cases} \quad (6)$$

Выполнив расчеты по зависимостям (6), изменяя параметр сплайна  $\lambda$  от 0 до 1 с шагом 0,1 получим координаты точек принадлежащих сплайну, который описывает

профиль зуба дисковой модульной фрезы табл. 3. По результатам расчета строим сплайн в Декартовой системе координат рис. 2.

Таблица 3. Результаты расчетов координат точек сплайна

№ п/п	$\lambda$	$X(\lambda)$ , мм	$Y(\lambda)$ , мм
1	0	0	0
2	0,1	-0,579	0,09
3	0,2	-1,004	0,375
4	0,3	-1,285	0,654
5	0,4	-1,449	0,869
6	0,5	-1,538	1,074
7	0,6	-1,613	1,391
8	0,7	-1,757	1,975
9	0,8	-2,082	2,979
10	0,9	-2,726	4,515
11	1	-3,86	6,616

Как видно из рис. 2 полученные параметры сплайна позволяют достаточно точно аппроксимировать профиль зуба дисковой модульной фрезы сплайном Безье 5-го порядка.

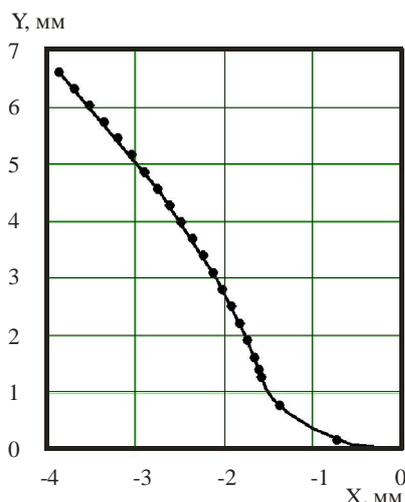


Рисунок 2. Сплайн описывающий профиль зуба дисковой модульной фрезы

Для оценки точности аппроксимации профиля зуба фрезы сплайном необходимо определить значения координаты  $X(\lambda)$  для заданного значения координаты  $Y$  (табл. 1) и сравнить полученное значение координаты  $X(\lambda)$  с табличным стандартным значением  $X$ . Для чего необходимо определить параметр сплайна  $\lambda$ , соответствующий заданному табличному значению координаты  $Y$ . Определим параметр сплайна  $\lambda$ , подставив во второе уравнение системы (4) соответствующее значение координаты  $Y$ :

$$Y = Yp_0 \cdot (1 - \lambda)^5 + 5Yp_1 \cdot \lambda \cdot (1 - \lambda)^4 + 10Yp_2 \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda)^3 + 10Yp_3 \cdot \lambda^3 \cdot (1 - \lambda)^2 + 5Yp_4 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda) + Yp_5 \cdot \lambda^5. \tag{7}$$

Уравнение (7) можно решить численными методами в математическом пакете MathCAD. Для чего составим программный блок в соответствии с блок-схемой представленной на рис. 3.

Найденный из уравнения (7) параметр сплайна  $\lambda$  подставим в первое и второе уравнения системы (4) и определим соответствующие значения координат  $X(\lambda)$  и  $Y(\lambda)$  точки сплайна. Выполним расчеты для всех координат  $Y$  точек заданных в табл. 1 по зависимостям (7) и (4). Полученные значения параметра сплайна  $\lambda$  и координат запишем в табл. 4. Для рассчитанных значений координат точек сплайна определим относительную погрешность.

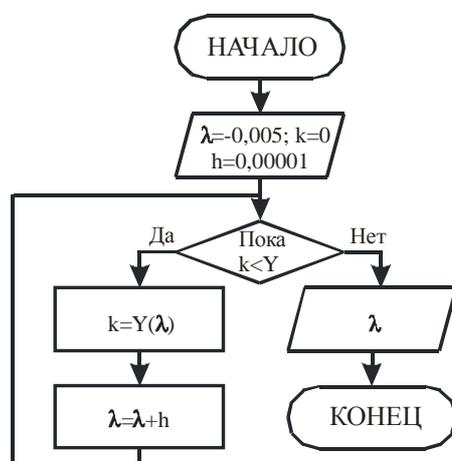


Рисунок 3. Блок-схема программного модуля для решения уравнения

Таблица 4. Значения координат точек сплайна, соответствующие заданным значением координат Y

№ п/п	$\lambda$	$X(\lambda)$ , мм	$\Delta X(\lambda)$ , %	$Y(\lambda)$ , мм	$\Delta Y(\lambda)$ , %
0	0	0	0	0	0
1	0,13344	-0,738	0,011	0,177	0,028
2	0,35372	-1,386	$2,194 \times 10^{-3}$	0,776	$5,216 \times 10^{-3}$
3	0,57046	-1,587	$5,602 \times 10^{-4}$	1,277	$3,158 \times 10^{-3}$
4	0,60348	-1,616	$6,098 \times 10^{-4}$	1,406	$3,163 \times 10^{-3}$
5	0,64708	-1,666	0,026	1,623	$5,256 \times 10^{-3}$
6	0,69275	-1,742	0,085	1,92	$6,088 \times 10^{-3}$
7	0,72905	-1,827	0,075	2,217	$4,272 \times 10^{-3}$
8	0,75958	-1,921	0,049	2,514	$8,264 \times 10^{-3}$
9	0,78617	-2,022	0,022	2,81	$4,466 \times 10^{-3}$
10	0,80992	-2,129	$4,293 \times 10^{-3}$	3,107	$7,855 \times 10^{-3}$
11	0,83149	-2,243	0,023	3,402	$6,195 \times 10^{-3}$
12	0,85135	-2,363	0,043	3,697	$7,039 \times 10^{-3}$
13	0,86982	-2,489	0,046	3,992	$6,407 \times 10^{-3}$
14	0,88714	-2,62	0,035	4,286	$5,323 \times 10^{-3}$
15	0,9035	-2,756	0,028	4,579	$7,010 \times 10^{-3}$
16	0,91903	-2,898	$3,503 \times 10^{-3}$	4,872	$4,217 \times 10^{-3}$
17	0,93386	-3,046	$9,014 \times 10^{-3}$	5,164	$7,636 \times 10^{-3}$

18	0,94806	-3,198	0,011	5,456	$5,288 \times 10^{-3}$
19	0,96172	-3,356	0,011	5,747	$5,833 \times 10^{-3}$
20	0,9749	-3,519	0,011	6,037	$5,507 \times 10^{-3}$
21	0,98765	-3,687	$4,305 \times 10^{-3}$	6,327	$6,210 \times 10^{-3}$
22	1,00002	-3,86	$7,485 \times 10^{-3}$	6,616	$7,156 \times 10^{-3}$

### 3. Выводы

В работе приведены основные зависимости позволяющие выполнить аппроксимацию геометрии профиля зуба дисковой зуборезной модульной фрезы гладкой кривой в виде сплайна Безье 5-го порядка. Выполнены расчеты для дисковой модульной фрезы предназначенной для обработки зубчатых колес с числом зубьев от 17 до 79 шт с модулем 3 мм. Проверка точности выполнения аппроксимации позволила установить, что она выполнена с высокой точностью, т.к. относительная погрешность в определении координаты  $X(\lambda)$  не превышает 0,085%, а координаты  $Y(\lambda)$  - не более 0,028%.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при решении пространственных технологических задач при анализе процессов происходящих во время формообразования зубчатых венцов, в том числе и с пространственными геометриями боковой поверхности зубьев.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Романов, В. Ф. Расчет зуборезных инструментов / В. Ф. Романов. – М.: Машиностроение, 1969. — 251 с.
2. ОСТ 2И-41-14-87 Фрезы дисковые зуборезные модульные. Технические условия. – 21 с.
3. Равська, Н. С. Визначення товщини зрізу при зубофрезеруванні черв'ячними фрезами зубчатих коліс / Н. С. Равська, О. А. Охріменко // Надійність інструменту та оптимізація технологічних систем. Збірник наукових праць. – Краматорськ, 2011. – вип. №28. – С. 3-12.
4. Андросов, С. П. Уравнение режущих кромок червячной модульной фрезы / С. П. Андросов // Приволжский научный вестник. – 2013. – №2 (18). – С. 4-7.
5. Отт, О. С. Формирование эвольвентных поверхностей деталей дисковым инструментом / О. С. Отт // Вестник МГТУ Станкин. – 2010. – №3. – С. 67-71.
6. Воронцов, Б. С. Математическое обеспечение интерактивного синтеза передач зацеплением / Б. С. Воронцов // Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ": Проблемы механического привода. – 2010. – №27. – С. 49-54. ISSN 2079-0791.
7. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
8. Белов, В. В. Компьютерная реализация решения научно-технических и образовательных задач: учебное пособие / В. В. Белов, И. В. Образцов, В. К. Иванов, Е. Н. Коноплев. – Тверь: ТвГТУ, 2015. – 108 с. – Режим доступа: <https://www.sunspire.ru/articles/> (дата обращения 5.06.2017).

Поступила в редколлегию 07.06.2017 г.