ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Стрельников В.Н., Суков Г.С. *(ЗАО НКМЗ, г. Краматорск, Украина)*

The geometrical analysis of circular gear gearing with intermediate rollers and boundary conditions of contact of the connected surfaces is executed. Quantitative dependences of an interference of tooth from geometrical parameters of elements of gearing and a corner of turn of a conducting shaft are received, in view of influence of elastic deformation of rollers.

Из анализа технико – экономических показателей приводов следует, что с увеличением цены на электроэнергию возникла проблема ее экономии и повышения КПД приводов. В связи с этим при выборе оптимального варианта привода возникла необходимость учитывать не только его стоимость, но и эксплуатационные расходы. Требования рынка определяют необходимость конструирования приводов с учетом обострившихся вопросов о снижении шума, металлоемкости и энергозатрат.

Указанным требованиям в наибольшей мере удовлетворяют исследуемые передачи, обладающие повышенной нагрузочной способностью по изгибным и контактным напряжениям, пониженной металлоемкостью, высоким КПД и низкой звуковой мощностью за счет использования упругих промежуточных тел качения [1].

Среди множества задач теории зацепления высших кинематических пар, к наиболее сложным относятся вопросы интерференции сопряженных поверхностей, которые в свою очередь определяют геометрические условия существования зубчатого зацепления. Это подчеркивает актуальность направления исследований.

Цель исследования заключается в определении рациональной области существования кругового зубчатого зацепления с промежуточными телами качения, а также разработка метода устранения интерференции зубьев.

Сателлит и солнечное колесо считаем достаточно жесткими по сравнению с роликами, которые предполагаются полыми с тонкими стенками. Ролики расположены на солнечном колесе ($Z_2 > Z_1$) и деформируются в зоне контакта с зубьями сателлита область деформации ролика заштрихована (рис. 1). Рассмотрим случай, когда зубья сателлита и солнечного колеса образованы одинаковым радиусом окружности равным радиусу роликов r. Если ролик жёсткий, то максимальную деформацию $i^{\underline{го}}$ ролика, можно считать интерференцией зацепления, равной расстоянию d_i по нормали от точки A_i до окружности недеформированного ролика. Для этого случая вводится декартова система координат XY с началом в точке O_1 на оси сателлита. Координаты центра окружности $i^{\underline{го}}$ ролика

$$X_{O_i} = R_2 \cos\frac{2\pi i}{Z_2} - e, \quad Y_{O_i} = R_2 \sin\frac{2\pi i}{Z_2}. \tag{1}$$

Координаты точки A_i вершин зуба сателлита

$$X_{A_i} = R_1 \cos\left(\frac{2\pi i}{Z_1} - \alpha^*\right), \quad Y_{A_i} = R_1 \sin\left(\frac{2\pi i}{Z_1} - \alpha^*\right). \tag{2}$$

Угол α^* определяется из треугольника $0_1 0A$ (рис. 1)

$$\cos\alpha^* = \frac{(R_1 + \Delta)^2 + R_1^2 - r^2}{2R_1(R_1 + \Delta)}. \tag{3}$$

Определяется интерференция беззазорного зацепления

$$d_i = r - \sqrt{\left(X_{oi} - X_{Ai}\right)^2 + \left(Y_{oi} - Y_{Ai}\right)^2}. \tag{4}$$

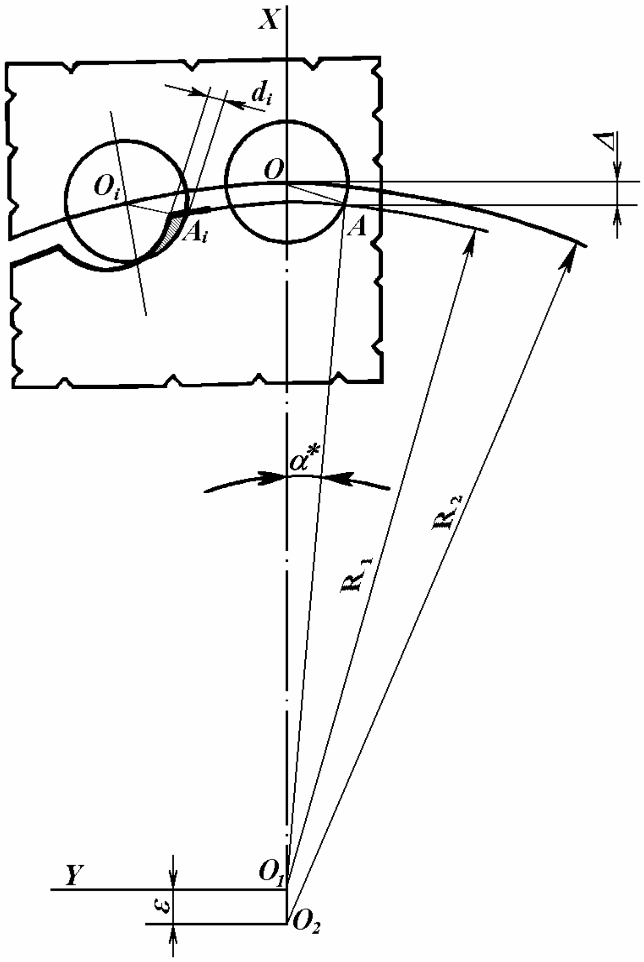

Рис. 1. Беззазорное зацепление с промежуточными телами качения

Таблица 1. Интерференция беззазорного зацепления с промежуточными телами качения

i	Xo_i, мм	Yo_i, мм	Xa_i, мм	Ya_i, мм	d_1, мм
1	76,608	20,517	76,519	13,498	– 0,019
2	68,995	39,745	70,418	32,843	– 0,047
3	56,840	56,475	59,518	49,949	– 0,054
4	40,906	69,657	44,562	63,652	– 0,031
5	22,194	78,462	26,569	73,016	0,014
6	1,880	82,337	6,766	77,405	0,058
7	– 18,759	81,039	– 13,498	76,519	0,064
8	– 38,427	74,648	– 32,843	70,418	– 0,006
9	– 55,887	63,567	– 49,949	59,518	– 0,188
10	– 70,044	48,492	– 63,652	44,562	– 0,504
11	– 80,007	30,370	– 73,016	26,569	– 0,957

Интерференция зацепления рассчитана для числовых данных (табл. 1), заданных в миллиметрах $R_1 = 77{,}7$, $R_2 = 82{,}5$, $\varepsilon = 3{,}3$, $\Delta = 1{,}5$, $r_1 = 7$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 25$, по формуле (3) определен угол $\alpha^* = 4{,}9955°$.

Интерференция наблюдается в зацеплении пятого, шестого и седьмого роликов, при этом уровень деформации шестого и седьмого роликов превышает допустимые величины. Полное устранение интерференции кругового зацепления не представляется возможным, т.к. при исключении податливости составных звеньев оно имеет циклически изменяющееся передаточное отношение и носит дискретный характер. Податливость роликов должна обеспечивать различные уровни деформации в процессе зацепления и уравновешивать передаточное отношение. Снижение уровня интерференции кругового зацепления выполняется последовательным изменением геометрических размеров сопряженных звеньев.

Увеличим радиус образующей окружности зуба сателлита r_1 на некоторую величину по сравнению с радиусом образующей окружности зуба солнечного колеса r $(r_1 > r)$ (рис. 2).

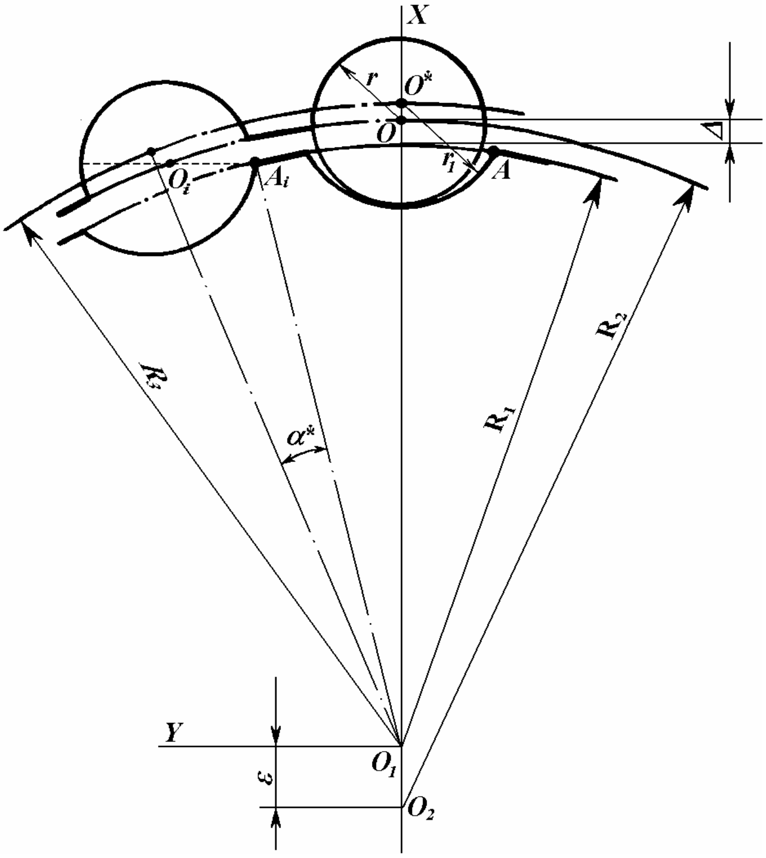

Рис. 2. Зацепление с увеличенным радиусом зубьев сателлита

Радиус роликов r^* предположительно считаем меньше радиусов образующих окружностей зубьев сателлита и солнечного колеса, его величина будет определена в процессе анализа зацепления. Радиальный зазор в зацеплении при нулевом положении ролика оставим равным нулю. Считаем, что максимальная интерференция наблюдается в зоне контакта ролика с выступом сателлита A_i.

Координаты кромки $i^{\text{го}}$ зуба сателлита определяются аналогично выражениям (2)

$$X_{A_i} = R_1 \cos\left(\frac{2\pi}{Z_1} i - \alpha^*\right), \qquad Y_{A_i} = R_1 \sin\left(\frac{2\pi}{Z_1} i - \alpha^*\right). \tag{5}$$

где угол α^* определяется аналогично выражению (3) (рис. 2)

$$\cos\alpha^* = \frac{R_1^2 + R_3^2 - r_1^2}{2R_1 \cdot R_3}. \tag{6}$$

Минимальное расстояние S_i от кромки $i^{\text{го}}$ зуба сателлита A_i до поверхности зуба солнечного колеса:

$$S_i = r + \sqrt{\left(X_{oi} - X_{Ai}\right)^2 + \left(Y_{oi} - Y_{Ai}\right)^2} \tag{7}$$

где координаты центров образующих окружностей зубьев колеса X_{oi}, Y_{oi} определяются по формуле (1) и радиус центров образующих окружностей зубьев сателлита R_3 (рис.2)

$$R_3 = R_1 + \Delta\left(r_i - r\right). \tag{8}$$

Расчеты выполняются для данных, где линейные размеры выражены в мм: $r = 7$, $r_1 = 7{,}03$, $R_1 = 77{,}7$, $R_2 = 79{,}2$, $\varepsilon = 3{,}3$, $\Delta = 1{,}5$, $Z_1 = 24$, $Z_2 = 25$. По приведенным формулам определяются $R_3 = 79{,}23$ *мм* и $\alpha^* = 5{,}012°$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2. Минимальные расстояния от кромки i-го зуба сателлита до сопряжённого зуба колеса

i	X_{oi}	Y_{oi}	X_{Ai}	Y_{Ai}	S_i
1	76,608	20,517	76,522	13,476	14,041
2	68,995	39,745	70,427	32,822	14,069
3	56,840	56,475	59,532	49,932	14,07
4	40,906	69,657	44,580	63,639	14,052
5	22,194	78,462	26,590	73,008	14,005
6	1,880	82,337	6,788	77,403	13,960
7	—18,759	81,039	—13,476	76,522	13.950
8	—38,427	74,648	—32,822	70,427	14,016
9	—55,887	63,567	—49,932	59,532	14,194
10	—70,044	48,492	—63,639	44,580	14,505
11	—80,007	30,370	—73,008	26,591	14,954

Из табл. 2 следует, что расстояния S_6 и S_7 меньше диаметра образующей окружности зубьев солнечного колеса.

Рассмотрим зацепление i-го ролика при обкатке сателлита по солнечному колесу (рис. 3). Вводится вращающаяся система координат *XY* с началом на оси солнечного колеса O_2, ось *X* пересекает ось сателлита O_1. Положение системы координат *XY* соответствует повороту ведущего вала на угол φ от начального положения, когда нулевой ролик расположен симметрично образующей окружности зуба солнечного колеса (рис. 2). Прямая *1* проходит через центр образующей окружности зуба солнечного колеса с нулевым роликом, ось *X* проходит через центр образующей окружности зуба сателлита взаимодействующего с нулевым роликом (рис. 3). Ролик находится в контакте с зубом солнечного колеса *2* и кромкой A_i зуба сателлита *3*. Из треугольника O_1O_2O определяется радиус ρ_i, углы λ и δ

$$\rho_i = \sqrt{R_2^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon R\cos\left(\frac{2\pi}{Z_2}i - \varphi\right)}, \quad \sin\lambda = \frac{R_2}{\rho_i}\sin\left(\frac{2\pi}{Z_2} - \varphi\right), \quad \sin\delta = \frac{\varepsilon}{\rho_i}\sin\left(\frac{2\pi}{Z_2} - \varphi\right). \tag{9}$$

Из треугольника O_1OA определяются углы χ и $\varkappa$

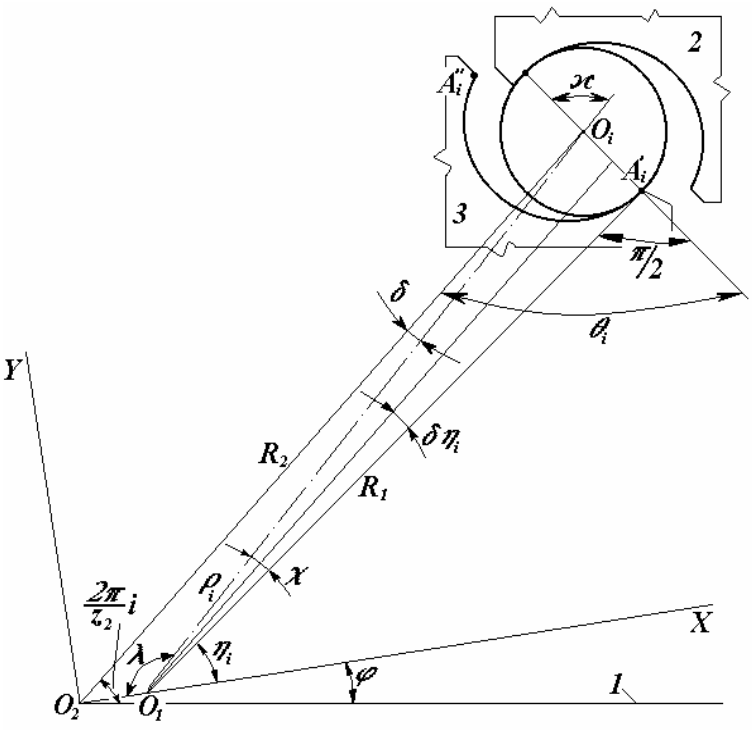

Рис. 3. Зацепление $i^{\underline{\text{го}}}$ ролика

$$cos\,\chi = \frac{\rho_i^2 + R_1^2 - \left(2r^* - r\right)^2}{2R_1}, \qquad sin\,\varkappa\ \frac{R_1}{\left(2r^* - r\right)} sin\,\chi. \tag{10}$$

Углы θ_i и η_i определяются из рис. 3

$$\theta_i = \varkappa + \delta, \qquad \eta_i = \pi - \lambda - \chi. \tag{11}$$

Координаты центра $k^{\underline{\text{ой}}}$ образующей окружности зуба солнечного колеса, отстоящей от $i^{\underline{\text{ой}}}$ образующей на j номеров, $(j = \underline{+}1,\ \underline{+}\ 2, \ldots, Z_2)$

$$X_{o_k} = R_2\, cos\left[\frac{2\pi}{Z_2}(i-j) - \varphi\right], \qquad Y_{o_k} = R_2\, sin\left[\frac{2\pi}{Z_2}(i-j) - \varphi\right]. \tag{12}$$

Координаты выступов $k^{\underline{\text{ой}}}$ образующей зуба сателлита A'_k и A''_k

$$X_{A'_k} = \varepsilon + R_1\, cos\left(\eta_i - \frac{2\pi}{Z_1} j\right), \qquad Y_{A'_k} = R_1\, sin\left(\eta_i - \frac{2\pi}{Z_1} j\right), \tag{13}$$

$$X_{A''_k} = \varepsilon + R_1\, cos\left(\eta_i - \frac{2\pi}{Z_1} j + 2\beta^*\right), \qquad Y_{A''_k} = R_1\, sin\left(\eta_i - \frac{2\pi}{Z_1} j + 2\beta^*\right). \tag{14}$$

Соответствующие минимальные расстояния между поверхностью зуба солнечного колеса и выступами зуба сателлита A'_k и A''_k

$$d'_k = r + \sqrt{(X_{A'_k} - X_{ok})^2 + (Y_{A'_k} - Y_{ok})^2}, \qquad d''_k = r + \sqrt{(X_{A''_k} - X_{ok})^2 + (Y_{A''_k} - Y_{ok})^2}. \tag{15}$$

По данным табл. 2 принимается максимальное значение радиуса ролика, при котором отсутствует интерференция зацепления, $r^* = 6{,}975$ и выполняются расчеты, результаты которых приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3. Значения углов θ_i и η_i

$\varphi°$	$\theta°_{I=7}$	$\eta°_{I=7}$
0	38,672	99,988
2,5	40,480	97,381
5,0	42,233	94,776
7,5	43,934	92,173
10	45,585	89,572
12	46,875	87,613
14,4	–	87,613

Из табл. 4 следует, что с увеличением угла φ расстояние d'_8 монотонно убывает, приближаясь к ролика. Определим расстояние d'_8 для последующих углов φ

φ, град	10	12	14,4
d'_8, мм	13,960	13,952	11,839

Из полученных данных следует, что при $\varphi\approx 12^\circ$ зацепление должно переключиться с седьмого ролика на восьмой (по недеформируемой схеме). При зацеплении кромки зуба сателлита с 7ым роликом, если он не деформируется, наблюдается тенденция деформации минус шестого ролика при изменении угла φ от 5° до $7{,}5^\circ$. Дальнейшее увеличение угла φ приводит к раскрытию контакта в зацеплении минус шестого ролика:

$$\varphi = 10^\circ \;\Rightarrow\; d''_{-6} = 13{,}948; \qquad \varphi = 12^\circ \;\Rightarrow\; d''_{-6} = 13{,}951.$$

Таблица 4. Минимальные расстояния от зуба солнечного колеса до кромки зуба сателлита

№ ролика	φ = 0°		φ = 2,5°		φ = 5°		φ = 7,5°	
	d'_k, мм	d''_k, мм	d'_k, мм	d''_k, мм	d'_k, мм	d''_k, мм	d'_k, мм	d''_k, мм
8	14,016	19,613	14,00	19,358	13,985	19,109	13,971	18,867
6	13,960	16,975	13,969	16,774	13,977	16,828	13,984	16,401
5	14,005	15,931	14,017	15,769	14,027	15,617	14,033	15,475
4	14,052	15,120	14,061	15,000	14,068	14,891	14,070	14,792
3	14,075	14,554	14,080	14,476	14,081	14,408	14,078	14,350
2	14,069	14,216	14,069	14,174	14,065	14,140	14,058	14,114
1	14,041	14,060	14,040	14,043	14,036	14,032	14,030	14,027
0	14,022	14,022	14,027	14,019	14,031	14,021	14,034	14,023
–1	14,060	14,041	14,081	14,042	14,102	14,047	14,125	14,054
–2	14,217	14,069	14,264	14,068	14,315	14,070	14,369	14,073
–3	14,554	14,075	14,639	14,070	14,728	14,066	14,821	14,064
–4	15,120	14,051	15,247	14,041	15,378	14,033	15,514	14,027
–5	15,931	14,005	16,100	13,993	16,273	13,984	16,450	13,977
–6	16,975	13,960	17,181	13,951	17,390	13,950	17,602	13,946
–7	18,217	13,950	18,453	13,953	18,691	13,960	18,930	13,971
–8	19,613	14,016	19,871	14,036	20,129	14,062	20,387	14,092

При угле $\varphi = 12°$ зацепление переключается на 8ой ролик и в этом случае:

φ, град	12	13,2	14,4
d''_{-6}, мм	13,953	13,951	13,950

Несовпадение в третьем знаке расстояний d''_{-6} при $\varphi = 12^\circ$ в зацеплении 7го и 8го роликов обусловлено тем, что момент переключения зацепления по углу φ определялся с точностью до третьего знака [2].

Передача крутящего момента через 7$^{\text{ой}}$ ролик приводит к его деформации и уменьшению сжатия минус шестого ролика до раскрытия контакта.

При деформации опорного ролика сателлит дополнительно повернется вокруг своей оси на угол $\delta\eta_I$, кромка зуба A_i переместится на расстояние $R_1 \cdot \delta\eta_I$. При этом радиальная деформация ролика $\Delta^{(*)}$ (рис. 3)

$$\Delta^{(*)} = R_1 \cdot \sin(\varkappa + \chi)\delta\eta_i, \text{ откуда:} \qquad \delta\eta_i = \frac{\Delta^*}{R_1 \sin(\varkappa - \chi)}$$

Величина угла η_i корректируется с учетом деформации $i^{\text{го}}$ ролика

$$\eta_i^* = \eta_i + \delta\eta_i. \tag{16}$$

Если принять радиальную деформацию ролика $\Delta^{(*)}=0{,}005$*мм*, что соответствует допустимому уровню их деформации, то можно скорректировать расстояние d''_{-6} по известной расчетной схеме, результаты чего внесены в табл. 5 в графу d''^*_{-6}.

Таблица 5

Минимальные расстояния от зуба колеса до кромки зуба сателлита, вычисленные с учетом упругой деформации роликов, мм

φ	$\delta\eta_7$	η^*_7	d''_{-6}
2,5°	0,0056	97,3863°	13,957
5°	0,0054	94,7814°	13,952
7,5°	0,0052	92,1785°	13,951

По результатам расчетов (табл. 5) максимально обжатый ролик в зацеплении (минус шестой) при передаче крутящего момента освобождается от деформации. Таким образом, путем варьирования параметров сопряженных звеньев, устранена интерференция зубьев в круговом зубчатом зацеплении с промежуточными телами качения. При этом учтена деформация упругих роликов от расчетной нагрузки.

Кромка зуба сателлита опирается на $i^{\text{ый}}$ ролик. Поворот сателлита относительно неподвижной плоскости определяется углом $(\eta_i+\varphi)$. Передаточное отношение U выражается отношением угловых скоростей ведущего и ведомого валов

$$U = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\eta}_i + \dot{\varphi}}. \tag{17}$$

Согласно рис. 5.3: $\eta = \pi - \lambda - \chi$. Производная угла η

$$\dot{\eta} = -\left(\dot{\lambda} + \dot{\chi}\right). \tag{18}$$

С помощью выражений (9) устанавливается связь между производными углов φ и λ

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{R^2}{\dot{\rho}}\left[\dfrac{\varepsilon R_2}{\rho^2}\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{Z_2}i - \varphi\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{Z_2}i - \varphi\right)\right]}{\cos\lambda}\dot{\varphi}. \tag{19}$$

Дифференцируем первое из уравнений (10) и определяем

$$\dot{\chi} = \frac{\dot{\rho}}{2R_1 p^2 \sin\chi}\left[R_1^2 - \left(2r^* - r\right)^2 - \rho^2\right]. \tag{20}$$

В уравнение (20) подставим значение $\dot{\rho}$ после дифференцирования (9)

$$\dot{\chi} = \frac{\varepsilon R_2\left[\rho^2 - R_1^2 + \left(2r^* - r\right)^2\right]\sin\left(\dfrac{2\pi}{Z_2}i - \varphi\right)}{2\rho^3 R_1 \sin\chi}\cdot\dot{\varphi}. \tag{21}$$

Значения (19) и (21) подставим в уравнение (18)

$$\frac{\dot{\lambda}+\dot{\chi}}{\dot{\varphi}}=\frac{R_2}{\rho\cos\lambda}\left[\frac{\varepsilon R_2}{\rho^2}\sin\left(\frac{2\pi}{Z_2}i-\varphi\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{Z_2}i-\varphi\right)\right]+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{Z_2}i-\varphi\right)}{2\rho^3 R_1\sin\chi}\left[\rho^2-R_1^2+\left(2r^*-r\right)^2\right]. \quad (22)$$

Передаточное отношение (17) представим с учетом выражения (18)

$$U=\frac{1}{1-\left(\frac{\dot{\lambda}+\dot{\chi}}{\dot{\varphi}}\right)}. \quad (23)$$

Выражение (23) при абсолютно жёстких роликах справедливо для всех значений φ. Однако следует учитывать условие переключения роликов в зацеплении соответствующим значением числа i. В рассматриваемом примере переключение зацепления 7-го ролика на 8-ой происходит при значении $\varphi \cong 12^\circ$.

Передаточное отношение циклически изменяется с периодом цикла, равным повороту ведущего вала на угол $\varphi = 14{,}4^\circ$. В промежутке изменения угла от $0^\circ \le \varphi \le 14{,}4^\circ$ наблюдаются флуктуации передаточного отношения в окрестностях заданного значения равного $U=24$. По размерам опытного образца: $R_1= 77{,}7$, $R'_2= 82{,}5$, $r=7$, $r^*= 6{,}975$, $\varepsilon = 3{,}3$, по формулам (5.9), (5.10), (5.11), (5.30) и (5.31), посчитано передаточное отношение U:

φ, град	0	2,5	5,0	7,5	10	12	12	13,2	14,4
U	- 23,04	- 23,63	- 24,13	- 24,54	- 24,83	- 25,10	- 22,38	- 22,72	- 23,04

Максимальное отклонение передаточного отношения от заданной величины $\Delta U_{max} = -1{,}62$. Конструктивные параметры кругового зацепления определяют контакт ролика с вогнутой поверхностью зуба солнечного колеса и областью близкой к кромке зуба сателлита.

В дальнейшем будут представлены материалы геометрического анализа, представляющие возможности взаимодействия ролика в зацеплении с поверхностями зубьев солнечного колеса и сателлита, исключающие кромочный контакт [3].

Выводы.

1. Выполнен геометрический анализ кругового зубчатого зацепления с промежуточными телами качения и граничными условиями контакта сопряженных поверхностей.
2. Получены количественные зависимости интерференции зубьев от геометрических параметров элементов зацепления и угла поворота ведущего вала, с учетом влиния упругой деформации роликов.
3. Разработан метод устранения интерференции зубьев, путем варьирования параметров элементов зацепления.
4. Получено выражение текущего значения передаточного отношения, при условии, что ролики не деформируются в процессе работы (однопарное зацепление).
5. Результаты исследований позволяют установить количественные значения геометрических и кинематических факторов, определяющих комплексные показатели функционирования кругового зацепления с промежуточными телами качения, с точки зрения его качественной оценки.

Список литературы: 1. Стрельников В. Н.. Теория зубчатого зацепления с упругими промежуточными телами качения. // Машиностроение и техносфера на рубеже XXI в.: сб. тр. XI МНТК. – Донецк: ДГТУ.– 2004. – т. 3. – С. 147 – 158. **2.** Стрельников В. Н.

Перспективные направления развития механических приводов тяжёлых машин (Часть 1). – М.: ВНИИМЕТМАШ, 1990. – 84 с. **3.** Стрельников В. Н. Взаимодействие упругих роликов с вогнутыми зубьями близкой кривизны. – М.: Машиностроение, 1992. – 322 с.

Сдано в редакцию 24.05.07

ОСОБЕННОСТИ ПРОЧНОСТНОГО РАСЧЁТА ГИБКОГО КОЛЕСА ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ

Суков Г.С., Стрельников В.Н. *(ЗАО НКМЗ, г Краматорск, Украина)*

The analysis tensely - the deformed condition of a flexible wheel of wave transfer which is submitted as result of action of loading, as the twisting moment, and regional effect on a joint of an environment with a gear wreath which influence is submitted as the field of indignations imposed on a field of tangents of pressure is executed. The adequate mathematical model of a flexible wheel as an environment and the rings connected by boundary conditions is besides developed. Components tenzor of pressure which are compared to results of experimental researches are received.

Технические характеристики волновых передач во многом определяются напряжённо - деформированным состоянием гибкого колеса. В известных решениях в качестве расчётных моделей используют оболочку или кольцо, что не адекватно исследуемому гибкому колесу и вносит заметные искажения в аналоговые модели реальных конструкций.

Разработанные методики расчёта на прочность гибких колёс основаны на опыте исследования небольших волновых передач с кулачковым генератором волн. Такие методики удовлетворяют условиям проектирования волновых редукторов, рассчитанных на передачу сравнительно небольшим крутящих моментов.

В расчётной методике [1] гибкое колесо рассмотрено как кольцо, лежащее на упругом основании, коэффициент постели основания обода следует определять экспериментально. Не рассмотрены условия нагрузки обода, распределённой по зубьям. Не определено число одновременно зацепляющихся зубчатых пар.

В работе [2] представлено напряжённое состояние гибкого стакана под действием двух радиальных сил, соединённого диафрагмой со ступицей. Гибкий зубчатый венец в решении не участвует, хотя оказывает существенное влияние на напряжённо – деформированное состояние гибкого колеса [3].

В работе [4] упрощённо определены деформации зубчатого венца гибкого колеса, без анализа его напряжённо – деформированного состояния. При этом используется принцип суперпозиции сил. Отсутствие связи деформации зубчатого венца с оболочкой гибкого колеса в форме краевых условий, вызывает значительные погрешности результатов полученного решения.

В статье [5] гибкое колесо рассматривается в виде кольца, напряжённое состояние которого представлено решением С.П. Тимошенко [6].

В отличие от исследований [2, 4, 5, 7], в [8] к зубчатому венцу гибкого колеса приложены распределённые нагрузки со стороны зубчатого зацепления $q(\theta)$ и генератора N_i. Влияние оболочки оговорено потоком касательных сил $S(\theta)$, который в дальнейшем решении не участвует. Плоская задача теории упругости для кольца